MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Auxiliar 2

21 de Marzo de 2022

P1. *a)* Calcule la integral de trabajo del campo $F(x,y,z) = (x-z, z-y, x-y)$ sobre la curva dada por la intersección entre el cilindro $\{x^2+y^2=1,\ z\in\mathbb{R}\}$ y el plano $\{z+x=1,\ y\in\mathbb{R}\}$.

b) Sea S la superficie dada por $z^2 = x^2+y^2$ para $z\in[1,2]$. Bosqueje S, de una parametrización y calcule el flujo

$$\int_S F\cdot d\vec{A},$$

para el campo $F(x,y,z) = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z^2$.

P2. *a)* Calcule la integral de trabajo para $F(x,y,z) = (x^2y, 2y, x)$ sobre la curva $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ donde,

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=0 \\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases} \quad \Gamma_2 = \begin{cases} 2x+z=1 \\ y=0 \\ x\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases} \quad \Gamma_3 = \begin{cases} 4x^2+y^2=1 \\ z=0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$$

b) Sea $F(x,y,z) = x^2y\hat{\jmath} + y^2z\hat{k}$. Calcule el flujo de F sobre $S = \{4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9,\ z\geq 0\}\subset\mathbb{R}^3$ usando el Teorema de Gauss.

P3. Considere la superficie S que se muestra en la Figura 1, orientada de modo que la normal del sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$, calcule la integral de trabajo sobre ∂S.

P4. *a)* Demuestre que si F es un campo vectorial clase $\mathcal{C}^2$ entonces

$$\nabla\times(\nabla\times F) = \nabla(\nabla\cdot F) - \Delta F.$$

b) Demuestre que si ϕ es un campo escalar clase $\mathcal{C}^2$ descrito en coordenadas ortogonales como $\phi(w_1,w_2,w_3)$, entonces su laplaciano se expresa como

$$\Delta\phi = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{H}{h_j^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\Big)\right],$$

donde h_i es el factor de escala asociado a w_i para $i\in\{1,2,3\}$ y $H = h_1h_2h_3$.

P5. Considere un sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas, que se define en términos de las coordenadas cartesianas de la siguiente forma $x=\sigma\tau$, $y=\frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2)$ y $z=z$.

a) Calcule los factores de escala asociados a (σ,τ,z).

b) Encuentre los vectores unitarios, chequee que son ortogonales y busque el orden positivo.

c) Sea

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\tau^3}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} + \frac{z\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ -\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} + \frac{z\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \end{pmatrix},$$

calcule divergencia y rotor.

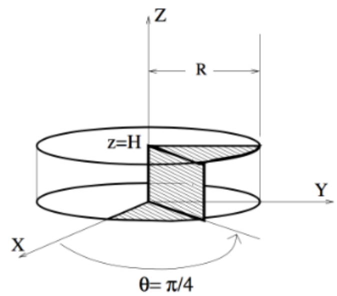

Figura 1

- Para un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r} = (u, v, w)$ se tiene que $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$ y $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$.
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y de forma análoga se define $\hat{v}$ y $\hat{w}$.
- $\nabla \cdot F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial_u}[F_u h_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_v}[h_u F_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_w}[h_u h_v F_w]\right)$
- $\nabla \times F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial_u} & \frac{\partial}{\partial_v} & \frac{\partial}{\partial_w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- Cilíndricas: $\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, $h_\rho = h_z = 1$ y $h_\theta = \rho$.
- Esféricas: $\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$, $h_r = 1$, $h_\varphi = r$ y $h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi$.
- (Integral de flujo) Sea S una superficie regular orientable,

$$\int_S F \cdot d\vec{A} = \int_D F(\vec{r}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right] dudv,$$

  donde $\vec{r}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación.
- $dV = |(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial w})| dudvdw$.
- (Integral de trabajo o línea) Sea Γ una curva simple y regular,

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt,$$

  donde $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ.
- (Teorema de Gauss) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, acotado y de frontera $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior. Sea F campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{A} = \int_\Omega \nabla \cdot F dV.$$