Pauta P1 (a) Control #1 CAA-2022-01

Sea $a>0$ fijo y $D=[0,+\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^3$. Considere el cambio de coordenadas dado por la función bijectiva $\vec{r}: D\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(u,v,w)=(a\cosh(u)\cos(v),\ a\,\mathrm{senh}(u)\,\mathrm{sen}(v),\ w)$$

I. Muestre que este cambio de coordenadas es ortogonal

Para esto, calculemos los factores de escala:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v,w)=(a\,\mathrm{senh}(u)\cos(v),\ a\cosh(u)\,\mathrm{sen}(v),\ 0)$$

$$\Rightarrow h_u^2=a^2\left[\mathrm{senh}^2(u)\cos^2(v)+\cosh^2(u)\,\mathrm{sen}^2(v)\right]$$

$$=a^2\left[\mathrm{senh}^2(u)-\mathrm{senh}^2(u)\,\mathrm{sen}^2(v)+\cosh^2(u)\,\mathrm{sen}^2(v)\right]$$

$(\cosh^2(u)-\mathrm{senh}^2(u)=1)$

$$=a^2\left[\mathrm{senh}^2(u)+\mathrm{sen}^2(v)\right]$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v,w)=(-a\cosh(u)\,\mathrm{sen}(v),\ a\,\mathrm{senh}(u)\cos(v),\ 0)$$

$$\Rightarrow h_v^2=a^2\left[\cosh^2(u)\,\mathrm{sen}^2(v)+\mathrm{senh}^2(u)\cos^2(v)\right]$$

$$=a^2\left[\mathrm{sen}^2(v)+\mathrm{senh}^2\,\mathrm{sen}^2(v)+\mathrm{senh}^2(u)\cos^2(v)\right]$$

$$=h_u^2=a^2\left[\mathrm{senh}^2(u)+\mathrm{sen}^2(v)\right]$$

(1.0 pto) $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial w}=(0,0,1),\ \Rightarrow h_w^2=1.$

Así, notamos que independiente de donde se defina (u,v,w), $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ son ortogonates, pues sm de la forma:

(0.5 ptos) $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -f_2(u,v) \\ f_1(u,v) \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II. Encuentre los factores de escala y el triedro unitario asociado

Usando los cálculos hechos en I, se tiene

(0.5 ptos) $$\hat{u} = \frac{(\alpha \operatorname{senh}(u)\cos(v), \alpha\cosh(u)\operatorname{sen}(v), 0)}{a\,(\operatorname{senh}^2(u) + \operatorname{sen}^2(v))^{1/2}}$$

(0.5 ptos) $$\hat{v} = \frac{(-\alpha\cosh(u)\operatorname{sen}(v), \alpha\operatorname{senh}(u)\cos(v), 0)}{\alpha\,(\operatorname{senh}^2(u) + \operatorname{sen}^2(v))^{1/2}}$$

(0.5 ptos) $$\hat{w} = (0,0,1)$$

III. Considere el campo escalar dado en estas nuevas coordenadas $h = uvw$. Calcule ∇h.

Usando la fórmula conocida para el gradiente en coordenadas ortogonales, tenemos

(0.5 ptos) $$\nabla h = \frac{1}{h_u}\frac{\partial h}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial h}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial h}{\partial w}\hat{w}$$

Usando los valores de h_u, h_v, h_w y $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ calculados anteriormente, se tiene

$$\nabla h = \frac{1}{a(\operatorname{senh}^2(u)+\operatorname{sen}^2(v))^{1/2}}\left[vw\,\frac{(\operatorname{senh}(u)\cos(v), \cosh(u)\operatorname{sen}(v), 0)}{a(\operatorname{senh}^2(u)+\operatorname{sen}^2(v))^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + uw\,\frac{(-\cosh(u)\operatorname{sen}(v), \operatorname{senh}(u)\cos(v), 0)}{a(\operatorname{senh}^2(u)+\operatorname{sen}^2(v))^{1/2}}\right] + uv\hat{k}$$

(0.5 ptos)

$$= \frac{w}{a^2(\operatorname{senh}^2(u)+\operatorname{sen}^2(v))}\Big[v(\operatorname{senh}(u)\cos(v), \cosh(u)\operatorname{sen}(v), 0) + u(-\cosh(u)\operatorname{sen}(v),$$

$$\operatorname{senh}(u)\cos(v), 0)\Big] + uv\hat{k}.$$

Pauta P1 (b) Control #1 CAA – 2022-01

Sea U el campo escalar de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, definido en coordenadas esféricas por

$$U(r) = -K \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

Muestre que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Usando la identidad $\Delta U = \text{div}(\nabla U)$ y la fórmula conocida para la divergencia en coordenadas ortogonales, con $u = r$, $v = \theta$ y $w = \varphi$, $h_u = 1$, $h_\theta = r$ y $h_\varphi = r\,\text{sen}(\varphi)$:

$$\text{div}(\nabla U) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left(\frac{\partial(h_\theta h_\varphi \nabla U_r)}{\partial r} + \frac{\partial(h_r h_\varphi \nabla U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h_r h_\theta \nabla U_\varphi)}{\partial \varphi} \right)$$

Tenemos que:

$$\Delta U = \text{div}(\nabla U) = \frac{1}{r^2 \text{sen}(\varphi)}\left(\frac{\partial(r^2 \text{sen}(\varphi) \nabla U_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\,\text{sen}(\varphi) \nabla U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \nabla U_\varphi)}{\partial \varphi} \right)$$

(0.5 ptos)

Pero U sólo depende de r, luego:

(0.5 ptos) $$\Delta U = \frac{1}{r^2 \text{sen}(\varphi)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \text{sen}(\varphi) \cdot K e^{-\alpha r} \frac{\alpha r + 1}{r^2} \right) \right] =$$

$$= K\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-\alpha r}(\alpha r+1)\right)\right]$$

$$= K\frac{1}{r^2}\left[-\alpha e^{-\alpha r}(\alpha r+1)+\alpha e^{-\alpha r}\right]$$

(1.0 ptos) $$= -\alpha^2\frac{Ke^{-\alpha r}}{r} \Rightarrow \Delta U = \alpha^2 U.$$