Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2022
Profesores: Carlos Conca y Alexander Frank
Auxiliares: Diego Olguín, Javier Monreal y Javier Castro

PAUTA PREGUNTA 2 - CONTROL 1

Sea S la sección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra encerrada por el cilindro de ecuación

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

a) Encuentre una parametrización de S y encuentre una expresión para su elemento de área en cada punto.

Hay varias parametrizaciones que se pueden hacer de esta superficie. Se incluirán tres alternativas.

Alternativa de solución 1: Una parametrización del disco de radio 1 en el plano XY, con centro en el origen es:

$$(r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)); \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ahora, si está centrado en $(1,0)$ es

$$(1 + r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)); \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ tenemos

$$z = (1 + r\cos(t))^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2(t) = 1 + 2r\cos(t) + r^2.$$

Por lo tanto una parametrización de la superficie del paraboloide que se encuentra sobre el disco, que es la solicitada, sería

$$\Phi(r,t) = (1 + r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t), 1 + 2r\cos(t) + r^2); \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{1}$$

Para el elemento de área:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 2\cos(t) + 2r) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= (-r\,\mathrm{sen}(t), r\cos(t), -2r\,\mathrm{sen}(t)) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= (-2r - 2r^2\cos(t), -2r^2\,\mathrm{sen}(t), r) \\
dA &= \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| drdt \\
&= \sqrt{4r^4 + 5r^2 + 8r^3\cos(t)}\, drdt \\
&= r\sqrt{4r^2 + 5 + 8r\cos(t)}\, drdt
\end{aligned}$$

Alternativa de solución 2: Utilizando coordenadas polares en el plano XY:

$$(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)); \quad \rho \geq 0, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para el disco de radio 1 centrado en $(1,0)$:

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 &\le 1 \\
(\rho\cos(\theta) - 1)^2 + \rho^2\operatorname{sen}^2(\theta) &\le 1 \\
\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) &\le 0 \\
\rho &\le 2\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ tenemos $z = \rho^2$. Por lo tanto una parametrización de la superficie solicitada sería

$$
\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta), \rho^2);\;\; 0 \le \rho \le 2\cos(\theta), -\pi/2 \le \theta \le \pi/2. \tag{2}
$$

Para el elemento de área:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} &= (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 2\rho) \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} &= (-\rho\operatorname{sen}(\theta), \rho\cos(\theta), 0) \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} &= (-2\rho^2\cos(\theta), -2\rho^2\operatorname{sen}(\theta), \rho) \\
dA &= \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right\| d\rho d\theta \\
&= \sqrt{4\rho^4 + \rho^2}\, d\rho d\theta \\
&= \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}\, d\rho d\theta
\end{aligned}
$$

Alternativa de solución 3: Utilizando los valores x e y cartesianos en el plano XY, notamos que para el disco de radio 1 centrado en $(1,0)$

$$
0 \le x \le 2; -\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}
$$

Por lo tanto una parametrización de la superficie solicitada sería

$$
\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2);\;\; 0 \le x \le 2; -\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}. \tag{3}
$$

Para el elemento de área:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= (1, 0, 2x) \\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= (0, 1, 2y) \\
\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= (-2x, -2y, 1) \\
dA &= \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\| dxdy \\
&= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- Cálculos y explicaciones relativos a la parametrización son consistentes (0, 4 pts).
- Expresa la parametrización correctamente, indicando el dominio de las variables involucradas (0, 8 pts).
- Calcula correctamente el campo de normales y su norma (0, 8 pts).

b) Sea $\delta(x,y,z) = \sqrt{1+4z}$ la densidad superficial de masa en cada punto de S. Calcule la masa de S.

Se detallará el cálculo para cada una de las alternativas de parametrización dadas en la parte anterior.

Solución con 1ra parametrización: La masa se obtiene haciendo la integral de superficie de la densidad.

$$\begin{aligned}
\iint_S \delta\, dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \delta\left(\Phi(r,t)\right)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4(1+2r\cos(t)+r^2)} \cdot r\sqrt{5+8r\cos(t)+4r^2}\, dtdr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r + 4r^3 + 8r^2\cos(t)\, dtdr \\
&= \int_0^1 2\pi(5r+4r^3)\, dr = 7\pi
\end{aligned}$$

Solución con 2da parametrización:

$$\begin{aligned}
\iint_S \delta\, dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \delta\left(\Phi(\rho,\theta)\right)\, dA \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} 4\rho^3 + \rho\, d\rho d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4(\theta) + 2\cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^2(\theta)(1-\operatorname{sen}^2(\theta)) + 2\cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 18\cos^2(\theta) - 4\operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9(1+\cos(2\theta)) - 2(1-\cos(4\theta))\, d\theta \\
&= 7\theta + \frac{9\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 7\pi
\end{aligned}$$

Solución con 3ra parametrización:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \delta\, dA &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \delta\left(\Phi(x,y)\right)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy \\
&= \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} 1+4x^2+4y^2\, dxdy
\end{aligned}
$$

Es muy difícil usando integrales iteradas. Hacemos cambio de variables polares $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, cuyo jacobiano es ρ.

La región la obtenemos mediante

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2} \\
(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\
(\rho\cos(\theta)-1)^2 + \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \leq 1 \\
\rho \leq 2\cos(\theta),
\end{aligned}
$$

y se puede elegir θ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

La integral queda:

$$
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} (1+4\rho^2)\rho\, d\rho d\theta,
$$

cuyo desarrollo se encuentra en la solución con la 2da parametrización.

Distribución de puntajes:

- Planteo de la integral, haciendo un uso correcto y consistente de la parametrización, la región de parametrización y el elemento de área correspondiente. $(1,2$ pts$)$.
- Cálculo de la integral (desde que el término a integrar está completamente desarrollado y/o reducido) $(0,3$ pts$)$.

c) Encuentre una parametrización de la curva ∂S y encuentre una expresión para su vector tangente en cada punto.

A partir de cada parametrización de la superficie S dada en la parte *a)* se puede obtener una parametrización para su borde ∂S. Acá se desarrollarán las tres alternativas.

Alternativa 1: El borde de la superfice en el caso de la 1ra parametrización se obtiene con $r = 1$.

$$
\gamma(t) = \Phi(1,t) = (1+\cos(t), \mathrm{sen}(t), 2+2\cos(t));\;\; 0 \leq t \leq 2\pi.
$$

La expresión para su vector tangente será:

$$
\gamma'(t) = (-\mathrm{sen}(t), \cos(t), -2\,\mathrm{sen}(t));\;\; 0 \leq t \leq 2\pi.
$$

Alternativa 2: El borde de la superfice en el caso de la 2da parametrización se obtiene con $\rho = 2\cos(\theta)$.

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= \Phi(2\cos(\theta),\theta) = (2\cos^2(\theta), 2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta), 4\cos^2(\theta)); \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \\ &= (2\cos^2(\theta), \mathrm{sen}(2\theta), 4\cos^2(\theta)); \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\end{aligned}$$

La expresión para su vector tangente será:

$$\gamma'(\theta) = (-4\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta), 2\cos(2\theta), -8\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)); \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

Alternativa 3: El borde de la superfice en el caso de la 3ra parametrización se obtiene en los casos en que $y = -\sqrt{1-(x-1)^2}$ e $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Nuestra parametrización tendrá dos partes, una para cada valor de borde.

Para el borde inferior:

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= \Phi(x, -\sqrt{1-(x-1)^2}) = (x, -\sqrt{1-(x-1)^2}, x^2+1-(x-1)^2); \quad 0 \le x \le 2 \\ &= (x, -\sqrt{1-(x-1)^2}, 2x); \quad 0 \le x \le 2\end{aligned}$$

Para el borde superior:

$$\begin{aligned}\gamma_2(x) &= \Phi(x, \sqrt{1-(x-1)^2}) = (x, \sqrt{1-(x-1)^2}, x^2+1-(x-1)^2); \quad 0 \le x \le 2 \\ &= (x, \sqrt{1-(x-1)^2}, 2x); \quad 0 \le x \le 2\end{aligned}$$

La expresión para su vector tangente para el borde inferior será:

$$\gamma_1'(x) = (1, (x-1)/\sqrt{1-(x-1)^2}, 2); \quad 0 \le x \le 2,$$

y para el borde superior:

$$\gamma_2'(x) = (1, -(x-1)/\sqrt{1-(x-1)^2}, 2); \quad 0 \le x \le 2.$$

Distribución de puntajes:

- Los cálculos y las justificaciones relativas a la parametrización de la curva son consistentes (0,3 pts).
- Expresa la parametrización indicando el intervalo de la variable (0,3 pts).
- Deriva para calcular el tangente (0,4 pts).

d) Calcule la integral de trabajo $\displaystyle\int_{\partial S} \vec{G}\cdot d\vec{r}$, donde

$$\vec{G}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+3}}\left(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+(z-2x)\hat{k}\right),$$

y ∂S está orientada de modo que su proyección en el plano xy se mueve en sentido antihorario.

Se detallará a continuación el cálculo con las tres alternativas de parametrización dadas en la pregunta anterior.

Solución con alt. 1: En este caso la proyección de $\gamma(t)$ en el plano XY está recorrida en sentido antihorario (si ese no fuera el caso, bastaría cambiar el signo del resultado de la integral de trabajo).

$$\begin{aligned}\vec{G}(\gamma(t)) &= \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)+3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+0\cdot\hat{k}) \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(t),\operatorname{sen}(t),0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\vec{G}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi}\vec{G}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}(t),\operatorname{sen}(t),0)\cdot(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),-2\operatorname{sen}(t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}-\operatorname{sen}^2(t)+\operatorname{sen}(t)\cos(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2t)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\,dt = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Solución con alt. 2: La proyección de $\gamma(\theta)$ en el plano XY está recorrida en sentido antihorario.

$$\begin{aligned}\vec{G}(\gamma(\theta)) &= \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{(2\cos^2(\theta)-1)^2+4\operatorname{sen}^2(\theta\cos^2(\theta)+3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+0\cdot\hat{k}) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{4\cos^4(\theta)-4\cos^2(\theta)+4\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)+4}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{4\cos^4(\theta)-4\cos^2(\theta)(1-\operatorname{sen}^2(\theta))+4}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}) \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2\theta),\operatorname{sen}(2\theta),0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\vec{G}\cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\vec{G}(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\operatorname{sen}(2\theta),\operatorname{sen}(2\theta),0)\cdot(-2\operatorname{sen}(2\theta),2\cos(2\theta),-4\operatorname{sen}(2\theta))\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}-2\operatorname{sen}^2(2\theta)+2\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(4\theta)-1+\operatorname{sen}(4\theta)\,d\theta = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Solución con alt. 3: La proyección de $\gamma_1(x)$ en el plano XY está recorrida en sentido antihorario, pero la proyección de $\gamma_2(x)$ está recorrida en sentido horario. A la integral de ésta última hay que cambiarle el signo.

$$\begin{aligned}
\vec{G}(\gamma_1(x)) &= \frac{-\sqrt{1-(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+1-(x-1)^2+3}}(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+0\cdot\hat{k}) \\
&= \frac{1}{2}(-\sqrt{1-(x-1)^2}, -\sqrt{1-(x-1)^2}, 0). \\
\vec{G}(\gamma_2(x)) &= \frac{1}{2}(\sqrt{1-(x-1)^2}, \sqrt{1-(x-1)^2}, 0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \vec{G}\cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \vec{G}(\gamma_1(x))\cdot\gamma_1'(x)\,dx - \int_0^2 \vec{G}(\gamma_2(x))\cdot\gamma_2'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (-\sqrt{1-(x-1)^2}, -\sqrt{1-(x-1)^2}, 0)\cdot(1, \frac{(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}, 2)\,dx \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^2 (\sqrt{1-(x-1)^2}, \sqrt{1-(x-1)^2}, 0)\cdot(1, -\frac{(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}, 2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 -\sqrt{1-(x-1)^2}-(x-1)\,dx \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}-(x-1)\,dx \\
&= -\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $x-1=\operatorname{sen} u$, $dx=\cos u\,du$. Como x está entre 0 y 2, $\operatorname{sen} u$ queda entre -1 y 1. Tomamos u entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \vec{G}\cdot d\vec{r} &= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,du \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}+\frac{\cos(2u)}{2}\,du = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Chequea la orientación de la parametrización $(0,3$ pts$)$.
- Calcula correctamente los elementos involucrados en la integral, junto con los límites de integración $(0,4$ pts$)$.
- Plantea y desarrolla correctamente la expresión a integrar $(0,5$ pts$)$.
- Calcula la integral $(0,3$ pto$)$.