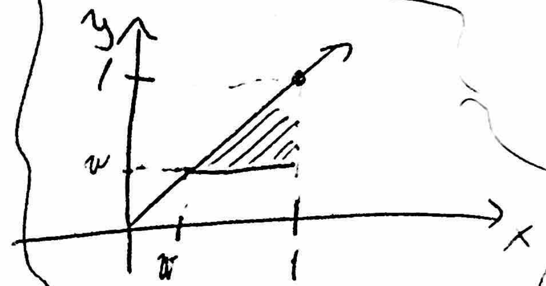
P1

$$\int_0^1\left[\int_w^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\right]dw$$

$\int_w^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy$ usar fubini




$\Downarrow$

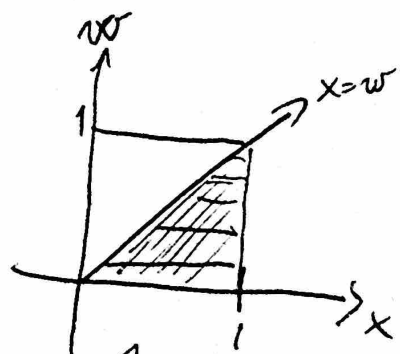
$x \in [w,1]$

$y \in [w,x]$

$$\Rightarrow \int_w^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy = \int_w^1\int_w^x e^{x^3}\,dy\,dx = \int_w^1 e^{x^3}(x-w)\,dx$$

Ahora

$$\int_0^1\int_w^1\int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\,dw = \int_0^1\int_w^1 e^{x^3}(x-w)\,dx\,dw$$




$\Downarrow$

$x \in [0,1]$

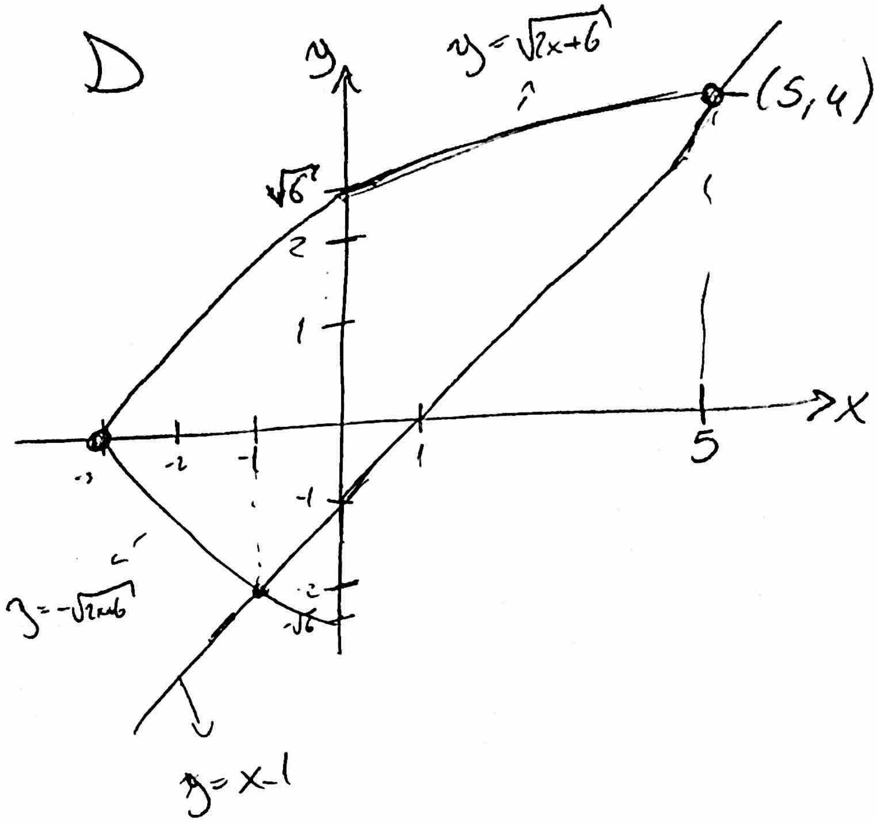
$w \in [0,x]$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1\int_0^x e^{x^3}(x-w)\,dw\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3}\left.-\frac{(x-w)^2}{2}\right|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3}\frac{x^2}{2}\,dx \overset{\substack{x^3=u\\ x^2dx=\frac{du}{3}}}{=} \int_0^1 e^u\,\frac{du}{6} = \boxed{\frac{e-1}{6}}$$

P2 Dibujar D




$$D = \{(x,y) : \mathbb{R}^2 \mid y \in [-2,4],\ x \in [\tfrac{y^2}{2}-3,\ y-1]\}$$

$$\iint_D y = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y-1} y \, dx\,dy = \int_{-2}^{4} y\left[y-1-\frac{y^2}{2}+3\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} y^2+2y-\frac{y^3}{2}\, dy = \frac{y^3}{3}+y^2-\frac{y^4}{8}\Big|_{-2}^{4}$$

$$= \frac{2^6}{3}+2^4-\frac{2^8}{2^3}+\frac{2^3}{3}-2^2+\frac{2^4}{2^3}$$

$$= \frac{2^6+2^3}{3}+2^4-2^5-2^2+2 = \frac{72}{3}-18 = \frac{72}{3}-\frac{54}{3} =$$

$$= \boxed{6}$$

P3 $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 = (x^2-1)(y^2-1) - 1$

$\nabla f(x,y) = (2xy^2 - 2x\ ,\ 2yx^2 - 2y)$

$= (2x(y^2-1)\ ,\ 2y(x^2-1))$

Si imponemos $\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow$

Puntos críticos

| |
|---|
| $x=0$ y $y=0$ |
| $x=1$ y $y=1$ |
| $x=1$ y $y=-1$ |
| $x=-1$ y $y=1$ |
| $x=-1$ y $y=-1$ |

Clasificar: Estudiar Hessiano

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{bmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Definida Negativa $\Rightarrow$ $(0,0)$ es Máximo Local

$H(1,1) = H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 16 \Rightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -4$

$\Rightarrow (1,1)$ y $(-1,-1)$ son puntos sillas

$H(1,-1) = H(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 16 \Rightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -4$

$\Rightarrow (1,-1)$ y $(-1,1)$ son puntos sillas

4) El problema es

$$\text{Min} \quad d(x,y) = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} \qquad (P)$$

$$\text{S.a} \quad x^2+y^2-\frac{1}{2}=0$$

Pero un Truquito, cuando la función objetivo es "feita", componer con funciones crecientes

Como $d(x,y) \geq 0$, $(\ )^2$ es creciente

Es equivalente resolver $(P')$

$(P')$

$$\text{Min} \quad (d(x,y))^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2} = \frac{x^2+2xy+y^2-4(x+y)+4}{2}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2} + xy - 2(x+y) + 2$$

$$\text{S.a} \quad \underbrace{x^2+y^2-\frac{1}{2}}_{g(x,y)} = 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{x^2+y^2}{2} + xy - 2(x+y) + 2 - \lambda\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)$$

$\cancel{\Leftrightarrow (x(1-2\lambda) +}$

$\nabla_{xy} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x + y - 2 - 2\lambda x,\ y + x - 2 - 2\lambda y) = (0,0)$

$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad (\square)$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x((1-2\lambda) + y = 2 \\ x + y(1-2\lambda) = 2 \end{array}\right\} \text{Restando}$$

$x(-2\lambda) + y(2\lambda) = 0$

$(y - x)(2\lambda) = 0 \quad (*)$

$(*) \Rightarrow \lambda = 0 \quad$ o $\quad y = x$

---

Si $\boxed{\lambda = 0} \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$

$(\square) \Rightarrow x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \overset{\text{Imposible}}{=} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2 - \cancel{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 6}}{2} \in \mathbb{C}$

Por lo que no existe $x \in \mathbb{R}$ $\times$

$\Rightarrow \boxed{\lambda \neq 0} \Rightarrow \boxed{x = y}$

$x = y \ (*) \ (\square) \Rightarrow 2x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Hay 2 puntos $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ó $(x,y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Duda ¿Hay máximo global? Candidato $(0,0)$

$$¿(x^2-1)(y^2-1)-1 \geq 0? \quad \text{Es falso}$$

$\uparrow$ $f(0,0)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Notemos que $f(x, \sqrt{2}) = (x^2-1)-1 = x^2-2$

Cuando $x \to \infty \Rightarrow f(x,y)$ tiende a infinito $\Rightarrow$ No hay máximo global

¿Hay mínimo global? No hay candidato (Solo puntos sillas)

Notemos que $f(x,0) = -x^2$, cuando $x \to \infty$ se va a menos infinito $\Rightarrow$ No hay mínimo global (Tampoco local por lo anterior)

$\Rightarrow$ Para $\boxed{x = \frac{1}{2} \;,\; y = \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(1-2\lambda) + \frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow (1-2\lambda) + 1 = 4$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

Para $\boxed{x = -\frac{1}{2} \;,\; y = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(1-2\lambda) + \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

$\Rightarrow (1-2\lambda) + 1 = -4$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$

---

Para saber cual es mínimo estudio $H_x\mathcal{L}$

$$H_{x,y}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 1 \\ 1 & 1-2\lambda \end{bmatrix} \;,\; H_{x,y}\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$
$$= (\lambda-4)(\lambda-2)$$
$$\Rightarrow \lambda = 4 \;,\; \lambda = 2$$

$\Rightarrow$ es definida positiva $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es mínimo

Similar $H_{x,y}\mathcal{L}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -(\lambda+5) & 1 \\ 1 & -(\lambda+5) \end{pmatrix} = (\lambda+5)^2 - 1 = \lambda^2 + 10\lambda + 24$

$= (\lambda+6)(\lambda+4) = 0 \rightarrow \lambda = -6 \;,\; \lambda = -4$

$\Rightarrow$ Definida Negativo $\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ es máximo

**Bonus** $\text{Min } f(x,y) = xy + x^2 + y^2$

$$\text{S.a } x^2+y^2 \le 1$$

Como no es $x^2+y^2=1$, Hacer 2 problem

① $\text{Min } xy + x^2 + y^2$

$\text{S.a } x^2+y^2=1$

Hacer Lagrange

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + x^2+y^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$

$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (y + 2x(1-\lambda), x+2y(1-\lambda))$

$= (0,0)$

$\Rightarrow 2x(1-\lambda) = -y \quad (1)$

$2y(1-\lambda) = -x \quad (2)$

$\lambda = 1 \Rightarrow x = y = 0 \quad * \quad x^2+y^2=1$

$\lambda \ne 1 \Rightarrow \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2.$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$

② $\text{Min } xy + x^2 + y^2$

$\text{S.a } x^2+y^2 < 1$

Hacer irrestricto y ver si c N conjunto

$\nabla f = 0 \Rightarrow \quad y + 2x = 0$

$x + 2y = 0$

$\Rightarrow 3(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y$

$\Rightarrow x = y = 0 \in x^2+y^2<1$

$\Rightarrow f(0,0) = 0$

Candidato de ②

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (\lambda-2)^2 - 1$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$

$= (\lambda-3)(\lambda-1)$

definido positivo

$\Rightarrow$ Mínimo

(Como no depende de $(x,y)$ global)

Evaluando los cuatro puntos, tenemos que

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Candidatos de 1 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

---

Como el candidato de 2 $(0,0) \in x^2+y^2<1$ y es menor que los de 1 es el mínimo de $x^2+y^2 \leq 1$

---

## Comentario

Si hubiera sido s.a $x^2+y^2 \geq 1$

$(0,0) \notin x^2+y^2>1$, por lo que el mínimo será alguien de $x^2+y^2=1$, en este caso

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$