MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 13: Más Integrales y Fubini

23 de junio de 2022

P1. Calcular

$$\int_T (x^3 y + \cos(x)) dy dx$$

donde $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < x\}$

P2. Calcule el volumen del tetraedro dado por: $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \leq 0, x + y + z \leq 1\}$

P3. Calcule la integral. Para $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x < y < 2x + 1, 1 - 2x < y < 8 - x\}$,

$$\int_D (y - 2x) dS$$

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, y considere el sólido de revolución D generado al rotar la curva $\{(x, f(x), 0) : x \in [a, b]\}$ sobre el eje OX. Demuestre la fórmula

$$V(D) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Usando la fórmula, verifique que el volumen de un cono es $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$ y el de un cilindro es $\pi R^2 h$

Resumen

Teorema de Fubini: Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y $f : R \to \mathbb{R}$ una función integrable, tal que las funciones.

$$x \in R_1 \to \int_{R_2} f(x, y) dy$$

$$y \in R_2 \to \int_{R_1} f(x, y) dx$$

Estan bien definidas y son integrables, entonces se tiene la siguiente igualdad

$$\int\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x, y) dx \right) dy$$