MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 11: Optimización con Restricción

9 de junio de 2022

P1. Optimice el valor de la función $f(x,y) = x$ sobre el conjunto de puntos (x,y) tales que $x^2 + 2y^2 = 3$

P2. Encuentre el máximo valor de la función

$$x + 2y + 3z$$

en la curva de la intersección del plano del plano $2x - y + z = \frac{-1}{4}$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = z$, mediante los multiplicadores de Lagrange.

P3. Dada una matriz A de $n \times n$ simétrica y definida positiva, a y $b \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$. Calcule el mínimo de la función $f(x) = x^t Ax + c^t x$, con $x \in R^n$, en el conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | a^t x = \beta\}$$

Calcule también el multiplicador de Lagrange y justifique bien por que este punto es un mínimo, de esta función en C.
Calcule para el caso particular de $a = (1, ..., 1)$, $c = (0, ..., 0)$, $A = I$ y $\beta = 1$

P4. Mostrar que $\dfrac{n!}{n^{n/2}}$ es el valor que resuelve el siguiente problema de maximización:

$$Max f(x_1, ..., x_n) = x_1 ... x_n$$

$$s.a \sum_{k=1} \frac{x_i^2}{i^2} = 1$$

Resumen

Multiplicadores de Lagrange: Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funciones de clase C^1, con $n > m$. Sea

$$A = \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : g(z) = 0\}$$

y supongamos que z_0 es tal que

$$f(z_0) = \min_{x \in A} f(x)$$

y que $\nabla g(z_0)$ de orden $n \times m$ es de rango completo (ie tiene m columnas linealmente independientes). Entonces existen λ_1 hasta λ_m tales que:

$$\nabla f(z_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(z_0) = 0$$

Def: Langrangeano es:

$$\mathcal{L}(z_0)f(z_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(z_0)$$

Condiciones que aseguran existencia de mínimos de $f(x)$:

-Weirstrass: Si la función es continua y el conjunto de restricción es compacto, la imagen es compacta y por lo tanto tiene máximo y mínimo.

-Coersitiva: Si $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$ y la función es continua, entonces tiene un mínimo en $\mathbb{R}^n$, para poder utilizarlo en los conjuntos con restricción dependerá del caso si se logra modificar, pero descarta que la función tenga mínimo para valores grandes.

Condición del Langrangeano: Si $H_x L(x_0, \lambda)$ es definido positivo (negativo): x_0 es un mínimo (máximo) para el problema con restricción, esto es solo una condición, pues si el Hessiano es 0, no sabemos que sucede.