

P1 a) Por Algebra de Continuas la función es Continua

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ salvo para } x^2+y^2=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Para verificar la continuidad en $(x,y)=(0,0)$

ADR: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \cdot |y| \leq |y|$$

Por sandwich $\text{Como } 0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$

$$\Rightarrow f(x,y) \rightarrow f(0,0) = 0 \quad \text{y se concluye que es Continuo}$$

$$b) f'(0,0; d_1, d_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(td_1, td_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 d_1 d_2^2}{t^2(d_1^2 + d_2^2)} = \frac{d_1 d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}$$

c) Para cualquier $(x,y) \neq (0,0)$ Usar derivada usual $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 \cdot (x^2+y^2) - xy^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$$

y Para $(x,y)=(0,0)$
Usar $(d_1, d_2) = (1,0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

Usando la

Por otro lado para $(d_1, d_2) = (0, 1)$ se recupera $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Para los $(x, y) \neq (0, 0)$ simultáneamente.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

1) No tenemos que ~~que~~ f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ por Algebra, pero las derivadas parciales son continuas

Para $\{(0, 0)\}$ no se tiene la continuidad, pero esto no implica que no sea diferenciable.

Contrarejemplo foro U Corsos $\begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{Diferenciable} \\ 0 & \text{en } x=0 \end{cases}$ y derivada discontinua

Para $\{(0, 0)\}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \vec{0} \cdot (h_1, h_2)|}{\|h\|}$

Candidato $\vec{0} = (0, 0)$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|h_1 h_2|^2}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|h_1 h_2|}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Para $(h_1, h_2) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{n})^3}{2 \cdot (\frac{1}{n})^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$ No es Diferenciable

El paso para decir que algo no es diferenciable es

Usar $DF(\vec{x}_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \right]$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{x}_0 + (h_1, h_2)) - f(\vec{x}_0) - DF(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|}{\|h\|} \neq 0$$

No decir que las derivadas son discontinuas

Idea 2 Suponer Diferenciable $\Rightarrow DF(\vec{x}_0) \cdot \vec{d} = DF(\vec{x}_0; \vec{d})$

y llegar a una contradicción
