MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 8: Taylor y Optimización

6 de mayo de 2022

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de la forma $f(x, y) = e^x y^2$:

a) Encuentre el plano tangente al grafo de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 2)$.

b) Encuentre la aproximación de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 2)$.

c) Use la aproximación de Taylor de orden 2 para estimar el valor de $f(0{,}9, 2{,}05)$

P2. Considere la función:

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$$

Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos en máximos locales, mínimos locales y puntos sillas. Determine si esta función posee mínimo global.

P3. Sea A una matriz definida positiva (recuerde que como su determinante es positivo, entonces es invertible) y c un vector de R^n.

a) Calcule el mínimo global de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con:

$$f(x) = x^t Ax + c^t x$$

b) Reemplace en su solución del problema $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y compruebe que es igual a haber resuelto el problema para $g(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$

P4. Encuentre y caracterice los puntos críticos de la función:

$$g(x, y) = x^3 - 2y^3 - \cos(x) + y^2$$

P5. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, con hessiano semidefinido positivo. Demuestre usando el Hessiano, que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{g(x)}$ tiene hessiano semidefinido positivo.

Resumen

[Hiperplano tangente]: Sea S una superficie suave definida por $S = \{x \in R^n : f(x) = 0\}$, se puede calcular el plano tangente de dicha superficie con la ecuación: $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$
Lema de Schwarz: Si las funciones son de clase C^2, se tiene que las derivadas 2-esimas pueden intercambiar las variables.
En español: Caso orden 2 si f es de clase C^1: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

El **Hessiano** de una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $x = (x_1, x_2, ...x_i, ..., x_n)$ se define como la matriz:

$$[H_f(x_0)]_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Aproximación de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Taylor de orden 2 en torno a x_0

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^t h + h^t H_f(x_0) h$$

Puntos Críticos: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sus puntos críticos son los x_0 para los cuales $\nabla f(x_0) = (0, 0, .., 0)$.
El Hessiano de f se dice **semi definido positivo (o definido positivo)** si:

> $h^t H_f(x_0) h \geq 0$, para todo vector h (o mayor estricto que 0, para $h \neq 0$).
> Los valores propios de $H_f(x_0)$ son mayores o iguales a 0 (mayores a 0).
> Los determinantes de las submatrices son mayores o iguales a 0 (mayores a 0).

Condición necesaria: Sea x_0 un punto critico este es:
-Si x_0 es **punto máximo local** , entonces $H_f(x_0)$ es semi definido negativo($-H_f(x_0)$ es semi definido positivo).
-Si x_0 es **punto mínimo local**, entonces $H_f(x_0)$ es semi definido positivo.

Condiciones Suficientes Sea x_0 un punto critico:
-Si $H_f(x_0)$ tiene valores propios positivos y negativos (ninguno 0), entonces x_0 es **punto silla**.
-Si $H_f(x_0)$ es definida positiva, entonces x_0 es punto máximo local.
-Si $H_f(x_0)$ es definida negativa, entonces x_0 es punto mínimo local.