MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 7: Regla de la cadena

28 de abril de 2022

P1. Considere el cambio de coordenadas parabólicas $x = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$ y $y = uv$.

Muestre que si se define: $g(u,v) = f\left(\dfrac{u^2 - v^2}{2}, uv\right)$, con f una función C^2, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y cumple que $\nabla g(0,0) = (1,3)$. Se define la función h como:

$$h(x,y,z) = g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3)$$

Encuentre $\nabla h(0,0,0)$

P3. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado p si cumple:

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

Para todo $\lambda > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y homogénea de grado p, entonces:

$$x \cdot \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i = p f(x)$$

Indicación: Estudie la función $g(\lambda) = f(\lambda x)$ y evalúe en un λ conveniente.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables. Defina $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por:

$$z(x,y) = x f(x+y) + y g(x+y)$$

Pruebe que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Propuestos

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $F(x, y) = f(f(x, y)^2, y)$. Calcule $\frac{\partial F(1,2)}{\partial y}$.
Sabiendo que $f(1, 2) = 1$ y $\nabla f(1, 2) = (4, 2)$

P2. Considere las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x \sin(z), y \cos(z))$$

$$g(x, y) = y^2 \cos(x)$$

$$h(x, y) = -y \ln(\cos(x))$$

A partir de estas funciones se define la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x, y) = f(x + y, g(x, y), h(y, x))$$

Calcular $J_\varphi(x, y)$ y concluya que: $J_\varphi(0, 1) = \begin{bmatrix} -\ln(\cos(1)) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Resumen

Regla de la cadena: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$, abiertos, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $g : \Lambda \to \mathbb{R}^k$. Supongamos que f es diferenciable en $x_0 \in \Omega$ y que g es difernciable en $f(x_0) \in \Lambda$, entonces $gof : \Omega \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable en x_0 y además:

$$D(gof)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$$

Corolario: Sea f, g como en el caso anterior, donde $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$.Entonces:

$$h(x) = g(f_1(x), ..., f_m(x))$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial h(x_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(f(x_0))}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$