MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 6: Repaso C1

21 de abril de 2022

P1. Considere la funcióon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \dfrac{x^3 y sin(xy^2)}{x^6 + y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Demuestre que f es diferenciable en estos puntos, y encuentre $f'(x,y)$

b) Determine, si existen, las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y las derivadas direccionales $f'((0,0) : (e_1, e_2))$ donde $\|(e_1,e_2)\| = 1$.

c) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

P2. Considere los conjuntos $A = \{(x, e^x)/x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + sin(y) < log(1 + |x| + |y|)\}$, estudie si son cerrados, abiertos y/o compactos? Mencione quienes son su adherencia, interior y frontera.

P3. Considere la función $f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2x + 1 \\ sin(3x + y - 2) \end{pmatrix}$

Muestre que f es diferenciable en $(0,2)$ y encuentre la mejor aproximaxion lineal afín$T(x,y)$ def cerca de este punto.Finalmente estime $f(0{,}1, 2{,}2)$

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f \\ f_3 \end{pmatrix}$, una función diferenciable en el punto $(0,2)$ tal que $f(0,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $f'(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere la función $g(x,y) := f_1(x,y) + f_2(x,y) f_3(x,y)$. Demuestre que g es diferenciable en $(0,2)$. Encuentre el vector $\nabla g(0,2)$.

P5. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x,y) = e^{5x+4y+xy-4x^2-6y^2}$ alcanza su máximo en R^2. **Indicacion:** considere primero la función $f(x,y) = -\ln(f(x,y))$.

Resumen

- **[Función diferenciable]**: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto, se dice que la función f es diferenciable en un punto x_0 si existe una aplicación lineal denotada por $Df(x_0)$ tal que:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

Esto es equivalente a que, en pequeñas variaciones de mi función, puedo aproximarla linealmente cometiendo un error proporcional a $O(\|h\|^2)$.

Observación: esta aplicación lineal es única. Si la función es diferenciable por coordenadas, entonces f es diferenciable.

- **[Diferenciable implica continua]**: Si la función f es diferenciable en el punto x_0, entonces es continua en dicho punto.

- **[Derivada Parcial]** Sera $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definimos la derivada parcial de f en $x_0 \in A$, con respecto a la i-ésima variable por

$$\frac{\partial f}{x_i}(x_0) =, \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+he_i) - f(x_0)}{h}$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica.
Obs: Esto sirve para estudiar el cambio en la dirección x_i, ignorando las restantes.

- **Teorema :(Valor medio)** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, Ö$, y \in A$ tal que el segmento que une a x e y está contenida en A . Si f es diferenciable en cada punto del segmento, entonces existe c en el segmento, tal que:

$$f(x) - f(y) = Df(c)(x-y)$$

- **Teorema :** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in A$.
Consideremos $F : A \to \mathbb{R}^m$ con $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$.
La matriz de $DF(a)$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ llamada matriz Jabobiana y derrotada por $F'(a)$ es aquella que:

$$F'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Obs: Con esto es fácil ver que $DF_i(a)e_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

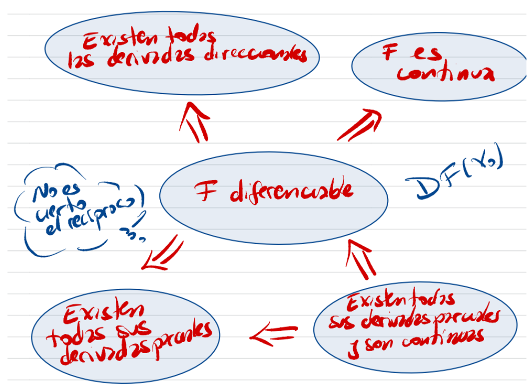
Obs2: Diferenciable implica Derivable.

- **Definición:** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, Se llama derivada direccional de f en el punto $x_0 \in A$ y la dirección a:

$$D_\sigma f(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\sigma)) - f(x_0)}{h}$$

Obs: La iésima derivada parcial es la derivada direccional en la dirección $\sigma = e_i$

- **Teorema :** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in A$. Si todas las derivadas parciales en x_0 son continuos, entonces $F : A \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0 .



- Sean f y g funciones $R^n \to R$ diferenciables en x_0 entonces:

$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$
$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0)$