MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 4: Continuidad

31 de marzo de 2022

P1. Estudie los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+x^2y^2+z^4}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $y_0 \neq 0$

d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{ln(1+(x-1)^2+y^2)+(x-1)^3+y^3}{x^2+y^2-2x+1}$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que para $\alpha < 3$ f es continua para todo $\mathbb{R}^2$.

b) Muestre que f no es continua para $\alpha \geq 3$.

c) Sea $A = \left\{ \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} > 1 \right\}$. Muestre que A es un conjunto abierto.

P3. Sea $R = \{(x,y)R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ y el sistema de ecuaciones

$$(E) \begin{cases} -2x + sen(y) = 0 \\ 3 + e^{-x^2} - 6y = 0 \end{cases}$$

Demuestre que (E) tiene solución única en R. **Indicación:** Utilice el Teorema del Punto Fijo de Banach.

P4. Sea $f : R^n \to R$ continua tal que

$$\forall L \in R, \exists M \in R \text{ tal que } \|x\| \geq M \Rightarrow f(x) \geq L$$

Para $\lambda \in R$ se define $S_\lambda := \{x \in R^n : f(x) \leq \lambda\}$. Pruebe que:

a) S_λ es cerrado

b) S_λ es acotado

Propuestos

P1. Sea $f : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua, suponga que existen $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$ tales que: $f(x_0) < 0 < f(x_1)$. Demuestre que existe un punto $\overline{x} \in B(0,1)$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
(Use el teorema de los valores intermedios para una función continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ adecuada).

P2. Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(y) - y\cos(x) - x + y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Indicación: $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)-1}{z} = 0$

Resumen

- **[Conjuntos compactos]**: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si para toda sucesión $x_n \subset A$, x_n tiene una subsucesión convergente a un punto en A.
- **[Caracterización conjuntos compactos en** $\mathbb{R}^n$**]**: $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto *ssi* es un conjunto cerrado y acotado.
- Sea $f(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces f se puede reescribir por componentes como:

  $$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_N(x))$$

  Con f_i una función definida de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Continuidad de Funciones

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $x_0 \in \Omega$, f se dice continua en x_0 si:

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \iff f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f_i(x) = f_i(x_0),\ \forall i \in \{1,2..,M\}$ y $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), .., f_M(x_0))$

Propiedades: Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua, se tiene que:

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado, entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado.
2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto.

Límites de Funciones

- Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $a \in \Omega$ un punto de acumulación, entonces se dice que $L \in \mathbb{R}^M$ es límite de f cuando x tiende a a. (las siguientes definiciones son equivalentes).

$$\begin{gathered} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \text{ tal que } \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon \\ \lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f_i(x) = L_i,\ \forall i \in \{1,2..,M\} \text{ y } L = (L_1, L_2, .., L_M) \\ (\forall\{x_k\} \subseteq \Omega) \text{ tal que } x_k \neq a, x_k \to a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = L \end{gathered}$$

Nota: El límite de funciones de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ en caso de existir es único.
Nota: El Teorema del Sandwich se cumple para funciones a valores en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\overline{\theta})} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \ell, \qquad \forall\overline{\theta} \in [0,2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_o} f(x,y) = \ell \quad \vee \quad \nexists\right) \wedge \left(\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_o} f(x,y) = \ell \ \vee \ \nexists\right)$$