MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 3: Conjuntos y Sucesiones II

24 de marzo de 2022

P1. Estudie las siguientes sucesiones (convergencia y si son acotadas):

a) $A_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)$

b) $B_n = \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}}-1}{2n}, (2n+1)\sin\left(\frac{1}{3n}\right)\right)$

c) $C_n = \left(n(2018^{\frac{1}{n}}-1), \left(\frac{20n+1}{20n}\right)^n\right)$

d) $D_n = \left(n\ln(1+en^{-1}), \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \sqrt[n]{2018n}\right)$

P2. Sea A y B subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que:

a) $A \subseteq B \implies int(A) \subseteq int(B)$ **[Propuesto]** $A \subseteq B \implies adh(A) \subseteq adh(B)$

b) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$. De un ejemplo que muestre la falsedad de la otra inclusión.

c) $Adh(A \cap B) \subseteq Adh(A) \cap Adh(B)$.]De un ejemplo que muestre la falsedad de la otra inclusión.

d) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$. Considere que A y B son no vacíos. De un ejemplo donde la inclusión sea estricta.

e) **[Propuesto]**$Fr(A) = Adh(A) \backslash int(A)$

P3. Encuentre (sin demostrar) la adherencia, interior, frontera de los siguientes conjuntos. También determine cuales son compactos:

a) $A = \{(x,y) \in R^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5\}$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : B_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [-1,1] | y = \lambda x\}$

c) $C = \{(x,y) \in R^2 | x \in Q, y > x^2\}$

P4. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se define

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Pruebe que:
Si A es cerrado y además B es cerrado y acotado, entonces $A + B$ es cerrado.

Propuestos

P1. Probar que:
i)$Adh(A) = \bigcap_{A \subseteq C} C$, C todos los conjuntos cerrados que contienen a A.
ii)$Int(A) = \bigcup_{B \subseteq A} B$, B todos los conjuntos abiertos que están contenidos en A.

Resumen

- [**Bolas abiertas y cerradas**]:
  Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \, \|x - x_0\| \leq r\}$$

- [**Conjunto abierto**]: Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

  Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión arbitraría de conjuntos abiertos es abierto y las intersecciones finitas.

- [**Conjunto cerrado**]: Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.
  Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección arbitraría de conjuntos cerrados es cerrado y las uniones finitas.

- [**Frontera**]: Se define la frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen:

$$\forall r > 0; B(x, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

- [**Adherencia**]: La adherencia de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ son todos los puntos tales que:

$$x \in A, \forall r > 0, \; B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

  Observación: Note que todo elemento de la frontera es también punto adherente.

- [**Interior**]: El Interior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ son todos los puntos tales que:

$$x \in A, \exists \delta > 0, \; B(x, \delta) \subseteq A$$

- [**Sucesiones en** $\mathbb{R}^n$]: Se define una sucesión en $\mathbb{R}^n$ como una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde por notación se suele denotar como $x(n) = x_n$. Se dice que x_n converge a algún $x_0 \in R^n$ *ssi* se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \; ||x_n - x_0|| \leq \epsilon$$

  Observación: al igual que en una dimensión, el límite, de existir, es único. Además, se satisface la linealidad en el límite.

- [**Límite de sucesiones vía sus componentes**]: Una sucesión x_n en $\mathbb{R}^n$ converge a un x_0 *ssi* cada una de sus componentes converge por separado a las componentes respectivas del vector x_0.

- [**Sucesiones acotadas**]: Se dice que x_n es una sucesión acotada si existe un $M > 0$ tal que $||x_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- [**Sucesiones de Cauchy**]: Se dice que x_n es sucesión de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||x_n - x_m|| < \epsilon$$

  Observación: Toda sucesión convergente y de Cauchy es acotada. A su vez, toda sucesión convergente es de Cauchy.

  En $\mathbb{R}^n$ se cumple, además, que toda sucesión de Cauchy es convergente.

- [**Espacio de Banach**]: Se dice que un espacio vectorial es de Banach si es normado y es completo, es decir, todas sus sucesiones convergentes son de Cauchy.

- [**Caracterización de un conjunto cerrado**]: Las siguientes proposiciones son equivalente para $A \subset \mathbb{R}^n$.

  - A es cerrado
  - $Fr(A) \subset A$
  - $A = Adh(A)$
  - Si $x_n \subset A$ y $x_n \to x_0$ entonces $x_0 \in A$.

- [**Teorema de Bolzano-Weierstrass**]: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente.

- [**Conjuntos compactos**]: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si para toda sucesión $x_n \subset A$, x_n tiene una subsucesión convergente a un punto en A.

- [**Caracterización conjuntos compactos en** $\mathbb{R}^n$]: $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto *ssi* es un conjunto cerrado y acotado.

P1 ⓐ $A_N = \left(Sin\left(\frac{N\pi}{2}\right), Cos\left(\frac{N\pi}{2}\right), \left(1+\frac{1}{2N}\right)^{2N}\right)$

$A_{4N} = \left(Sin(2N\pi), Cos(2N\pi), \left(1+\frac{1}{8N}\right)^{8N}\right)$

$= \left(0, 1, \left(1+\frac{1}{8N}\right)^{8N}\right)$

Recordando que $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} \to e$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{8N}\right)^{8N} \to e$, pues es subsucesión

$\Rightarrow A_{4N} \to (0, 1, e)$

Por otro lado

$A_{4N+1} = \left(Sin(2N\pi + \frac{\pi}{2}), Cos(2N\pi + \frac{\pi}{2}), \left(1+\frac{1}{8N+2}\right)^{8N+2}\right)$

$= \left(1, 0, \left(1+\frac{1}{8N+2}\right)^{8N+2}\right)$

$A_{4N+1} \to (1, 0, e)$

$\Rightarrow A_N$ No converge / por unicidad

$$\|A_N\|_2 = \sqrt{\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(1+\frac{1}{2N}\right)^{2N\cdot 2}}$$

$$= \sqrt{1 + \left(1+\frac{1}{2N}\right)^{4N}}$$

$$\leq 1 + \left|\left(1+\frac{1}{2N}\right)^{2N}\right|$$

$$= 1 + \left(1+\frac{1}{2N}\right)^{2N}$$

Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\Rightarrow \exists K>0$ TN que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq K$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2N}\right)^{2N} \leq K \quad \forall N$

$\Rightarrow \|A_N\|_2 \leq 1+K = M > 0$

$\Rightarrow A_N$ es acotada

b) $B_N = \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{2n}, (2n+1)\sin\left(\frac{1}{3n}\right) \right)$

$e^{\frac{1}{2N}} - 1 \to 0$ y $\frac{1}{2N} \to 0$

$\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{2N}} - 1}{2N} \to 0 \Rightarrow \exists K_1 > 0 \quad \left| \frac{e^{\frac{1}{2N}} - 1}{2N} \right| \leq K_1$

Por otro lado $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$

$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{1}{3N}\right)}{\frac{1}{3N}} \to 1$

$\Rightarrow \underline{\sin\left(\frac{1}{3N}\right)} \cdot (2N+1) = \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{3N}\right)}{\frac{1}{3N}} \right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{2N+1}{3N} \right)}_{\to \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \exists K_2 > 0 \quad \left| \sin\left(\frac{1}{3N}\right) \cdot (2N+1) \right| \leq K_2$

$\Rightarrow B_N \to \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$\|B_N\|_2 \leq \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = M$

c) $C_N = \left(n(2018^{\frac{1}{n}} - 1), \left(\frac{20n+1}{20n} \right)^n \right)$

$$C_N = \left(\frac{2018^{\frac{1}{N}} - 1}{\frac{1}{N}}, \left(\left(1 + \frac{1}{20N}\right)^{20N} \right)^{\frac{1}{20}} \right)$$

$$= \left(\frac{e^{\ln(2018)\cdot\frac{1}{N}} - 1}{\ln(2018)\cdot\frac{1}{N}} \cdot \ln(2018), \left(\left(1+\frac{1}{20N}\right)^{20N} \right)^{\frac{1}{20}} \right)$$

$\Rightarrow C_N \to \left(\ln(2018), e^{\frac{1}{20}} \right)$

Como cada componente converge

$\Rightarrow$ Converge y como converge es Acotado

d) $D_N = \left(n\ln(1+en^{-1}), \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \sqrt[n]{2018n}\right)$

$= \left(\underbrace{\frac{\ln(1+en^{-1})}{en^{-1}}}_{1} \cdot e, \underbrace{(1-\cos(n\pi))}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n\pi)^2}}_{0}, \underbrace{\sqrt[n]{2018}}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} \right)$

$\Rightarrow D_N \to (e, 0, 1)$

Como D_N converge $\Rightarrow$ Es Acotado

P2 a) Como $A \subseteq B$ si: $x \in A \Rightarrow x \in B$

Sea $x \in Int(A) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ Tal que

$B(x, \delta) \subset A \subset B$

$\Rightarrow \exists \tilde{\delta} = \delta > 0 \quad \forall N$ que

$B(x, \tilde{\delta}) \subset B \Rightarrow x \in Int(B)$

Ahora con $Adh(A)$

Sea $x \in Adh(A) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

Como $A \subseteq B \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \subseteq B(x, \varepsilon) \cap B$

Si $\emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap A \Rightarrow \emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap B$

$\Rightarrow x \in Adh(B)$

b) Como $A \subseteq A \cup B$ por a)

$\Rightarrow Int(A) \subseteq Int(A \cup B)$

Similar

$Int(B) \subseteq Int(A \cup B)$

$\Rightarrow \mathring{I}nt(A) \cup \mathring{I}nt(B) \subseteq \mathring{I}nt(A \cup B)$

Sea $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}^c$ $\Rightarrow$ $\mathring{I}nt(A) = \emptyset$, $\mathring{I}nt(B) = \emptyset$

$\Rightarrow A \cup B = \mathbb{R}$, $\mathring{I}nt(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ La contraria no se cumple siempre

c) Como $A \cap B \subseteq A$

$\Rightarrow$ $Adh(A \cap B) \subseteq Adh(A)$

Similar $Adh(A \cap B) \subseteq Adh(B)$

$\Rightarrow$ $Adh(A \cap B) \subseteq Adh(A) \cap Adh(B)$

Sea $A = [0,1]$, $B = (1,2]$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow Adh(A \cap B) = \emptyset$

$\Rightarrow Adh(A) = [0,1]$

$Adh(B) = [1,2]$

$\Rightarrow Adh(A) \cap Adh(B) = \{1\}$

$\Rightarrow$ El contrario no es cierto siempre

b) Sea $x \in Fr(A \cup B)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

$B(x, \varepsilon) \cap A^c \cap B^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ o $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$

y $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ y $B(x, \varepsilon) \cap B^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $x \in Fr(A)$ o $x \in Fr(B)$

$\Rightarrow$ $x \in Fr(A) \cup Fr(B)$

Si $A = B((0,0), 1)$

$B = B((0,0), 2)$

$\Rightarrow A \cup B \subset B \Rightarrow Fr(A \cup B) = Fr(B) = x^2 + y^2 = 4$

Pero $Fr(A) = x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

E) Sea $x \in Fr(A)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in Adh(A)$

y $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \not\subseteq A$

$\Rightarrow x \notin Int(A)$

$\Rightarrow \quad x \in Adh(A) \cap Int(A)^c = Adh(A) \setminus Int(A)$

Si $x \in Adh(A) \setminus Int(A) = Adh(A) \cap Int(A)^c$

$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $\forall \mu > 0 \quad B(x, \mu) \not\subseteq A$

$\overset{\varepsilon = \mu}{\Rightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \quad x \in Fr(A)$

P3 a) $Int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x| \ , \ x^2+y^2 < 5\}$

$Adh(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x| \ , \ x^2+y^2 \leq 5\}$

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y| \ , \ x \leq \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 5 \ , \ x \geq \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

A no es compacto, pues no es cerrado

Pero $Adh(A)$ es compacto

b) $B_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [-1,1] : y = \lambda x\}$

$Int(B_\lambda) = \emptyset$, pues B_λ es cerrado

$Adh(B_\lambda) = B_\lambda$

$Fr(B_\lambda) = B_\lambda$

Como es cerrado y acotado $\Rightarrow$ B_λ compacto

c) $C = \{ x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}, y > x^2 \}$

$\text{Int}(C) = \emptyset$

$\text{Adh}(C) = \{ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \geq x^2 \}$

$\Rightarrow Fr(C) = \text{Adh}(C) \setminus \text{Int}(C)$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$

$\text{Adh}(C) \neq C \Rightarrow C$ não é fechado

$\Rightarrow C$ não é compacto

Obs: Se $C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > x^2\}$

$\text{int}(C') = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > x^2\} = C'$

$\text{Adh}(C') = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}$

$\Rightarrow F_T(C^1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$

P4 Notar que Como A es cerrado

$\Rightarrow (a_n) \subset A$

Si $a_n \longrightarrow a \Rightarrow a \in A$

Similar con $(b_n) \subset B$

Pero como B Tambien es Acotado y $\subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow B$ compacto

$\Rightarrow$ Sea $(b_n) \subset B$

Aunque $b_n \not\to$

$\exists \varphi(n)$ tal que $b_{\varphi(n)} \longrightarrow \tilde{b} \in B$

Sea $(z_n) \subset A+B$

y $z_n \to z$

Pdx $z \in A+B \iff z = a+b$, $a \in A$, $b \in B$

Como $(z_n) \subset A+B$

$\Rightarrow z_n = a_n + b_n$, $(a_n) \subset A$, $(b_n) \subset B$

Obs: $z_n \to z \not\Rightarrow a_n \to a$, $b_n \to b$

$a_n = n$ y $b_n = \frac{1}{n} - n$

$$\Rightarrow \quad a_n + b_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Como B compacto

$$\Rightarrow \exists_{\varphi(n)} \quad b_{\varphi(n)} \to b \in B$$

Como $z_n \to z \Rightarrow z_{\varphi(n)} \to z$

↑ Subsucesión

$$\Rightarrow \quad z_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)}$$

$z_{\varphi(n)} \to z$, $b_{\varphi(n)} \to b$

$$\Rightarrow$$

$$a_{\varphi(n)} \to z - b$$

Como $(a_{\varphi(n)}) \subset A$ y A cerrado

Como $a_{(x_n)} \to z-b \in A$

Como $z = \underbrace{z-b}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B}$

$$\Rightarrow \boxed{z \in A+B}$$

Con lo que se concluye que $A+B$ cerrado

Propuesto 1

a) $Adh(A) = \bigcap_{A \subseteq C} C$, C cerrado

c

Sea C un cerrado cualquiera y $A \subseteq C$

Como $Adh(A) \subseteq Adh(B)$ si $A \subseteq B$

$\Rightarrow Adh(A) \subseteq Adh(C)$

Pero C cerrado $\Rightarrow Adh(C) = C$

$\Rightarrow Adh(A) \subseteq C$

Como es Para cualquier C

$\Rightarrow Adh(A) \subseteq \bigcap_{A \subseteq C} C$ y C cerrado

$\supseteq$ No Tenemos $Adh(A) \supseteq A$

y es cerrado

$\Rightarrow$ Es un cerrado que contiene a A

y como $\bigcap_{A \subseteq C} C$ es la cerrado

intersección de todo

$$\bigcap_{A \subseteq C} C \cap \underbrace{Adh(A)}_{\text{ya está en intersección}} = \bigcap_{A \subseteq C} C$$

$$\bigcap_{A \subseteq C} C \cap Adh(A) \subseteq Adh(A)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{A \subseteq C} C \subseteq Adh(A)$$

$\Rightarrow$ Son iguales

b) $Int(A) = \bigcup_{D \subseteq A} B$ B abierto

$B \subset A$ y como int es monótona

$int(B) \subset int(A)$ pero B abierto $\Rightarrow B = int(B)$

$\Rightarrow B \subset int(A)$

Como es $\forall B \subseteq A$ con B abierto

$$\Rightarrow \bigcup_{B \subseteq A} B \subset int(A)$$

2) Como $int(A) \subseteq A$ y es Abierto

es uno de los elementos de la unión y como $X \cup Y \supseteq X$

$$\Rightarrow \bigcup_{B \subseteq A} B \supset int(A)$$

$\Rightarrow$ Son iguales