

MA2001-7 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Ariel Perez Contreras**Auxiliar:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 3: Conjuntos y Sucesiones II**

24 de marzo de 2022

P1. Estudie las siguientes sucesiones (convergencia y si son acotadas):

$$\begin{aligned}
 a) \quad A_n &= \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right) & c) \quad C_n &= \left(n(2018^{\frac{1}{n}} - 1), \left(\frac{20n+1}{20n}\right)^n \right) \\
 b) \quad B_n &= \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{2n}, (2n+1) \sin\left(\frac{1}{3n}\right) \right) & d) \quad D_n &= \left(n \ln(1 + en^{-1}), \frac{1 - \cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \sqrt[n]{2018n} \right)
 \end{aligned}$$

P2. Sea A y B subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que:

- a) $A \subseteq B \implies \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$ [**Propuesto**] $A \subseteq B \implies \text{adh}(A) \subseteq \text{adh}(B)$
- b) $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$. De un ejemplo que muestre la falsedad de la otra inclusión.
- c) $\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$. De un ejemplo que muestre la falsedad de la otra inclusión.
- d) $\text{Fr}(A \cup B) \subseteq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$. Considere que A y B son no vacíos. De un ejemplo donde la inclusión sea estricta.
- e) [**Propuesto**] $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{int}(A)$

P3. Encuentre (sin demostrar) la adherencia, interior, frontera de los siguientes conjuntos. También determine cuales son compactos:

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5\}$
- b) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : B_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1] | y = \lambda x\}$
- c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in Q, y > x^2\}$

P4. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se define

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Pruebe que:

Si A es cerrado y además B es cerrado y acotado, entonces $A + B$ es cerrado.**Propuestos****P1.** Probar que:

- i) $\text{Adh}(A) = \bigcap_{A \subseteq C} C$, C todos los conjuntos cerrados que contienen a A .
- ii) $\text{Int}(A) = \bigcup_{B \subseteq A} B$, B todos los conjuntos abiertos que están contenidos en A .

Resumen

■ [Bolas abiertas y cerradas]:

Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}$$

■ [Conjunto abierto]:

Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto y las intersecciones finitas.

■ [Conjunto cerrado]:

Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.

Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado y las uniones finitas.

■ [Frontera]:

Se define la frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ como el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen:

$$\forall r > 0; B(x, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

■ [Adherencia]:

La adherencia de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ son todos los puntos tales que:

$$x \in A, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Observación: Note que todo elemento de la frontera es también punto adherente.

■ [Interior]:

El Interior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ son todos los puntos tales que:

$$x \in A, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq A$$

■ [Sucesiones en $\mathbb{R}^n$]:

Se define una sucesión en $\mathbb{R}^n$ como una función $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde por notación se suele denotar como $x(n) = x_n$. Se dice que x_n converge a algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ssi* se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \quad \|x_n - x_0\| \leq \epsilon$$

Observación: al igual que en una dimensión, el límite, de existir, es único. Además, se satisface la linealidad en el límite.

■ [Límite de sucesiones vía sus componentes]:

Una sucesión x_n en $\mathbb{R}^n$ converge a un x_0 *ssi* cada una de sus componentes converge por separado a las componentes respectivas del vector x_0 .

■ [Sucesiones acotadas]:

Se dice que x_n es una sucesión acotada si existe un $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■ [Sucesiones de Cauchy]:

Se dice que x_n es sucesión de Cauchy si $\forall \epsilon > 0, \exists m, n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

Observación: Toda sucesión convergente y de Cauchy es acotada. A su vez, toda sucesión convergente es de Cauchy.

En $\mathbb{R}^n$ se cumple, además, que toda sucesión de Cauchy es convergente.

■ [Espacio de Banach]:

Se dice que un espacio vectorial es de Banach si es normado y es completo, es decir, todas sus sucesiones convergentes son de Cauchy.

■ [Caracterización de un conjunto cerrado]:

Las siguientes proposiciones son equivalente para $A \subset \mathbb{R}^n$.

- A es cerrado
- $Fr(A) \subset A$
- $A = Adh(A)$
- Si $x_n \subset A$ y $x_n \rightarrow x_0$ entonces $x_0 \in A$.

■ [Teorema de Bolzano-Weierstrass]:

Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente.

■ [Conjuntos compactos]:

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si para toda sucesión $x_n \subset A$, x_n tiene una subsucesión convergente a un punto en A .

■ [Caracterización conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$]:

$A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto *ssi* es un conjunto cerrado y acotado.