

MA2001-7 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Ariel Perez Contreras**Auxiliar:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 2: Conjuntos y Sucesiones**

17 de marzo de 2022

P1. Para los siguientes conjuntos estudie si son abiertos y/o cerrados. Luego calcule sus fronteras.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in Q\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \geq 0, y \leq x^{-1}\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$

P2. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se define

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

a) Sea $b \in B$. Demuestre que si A es abierto entonces $A + \{b\}$ es abierto.b) Suponga que A es abierto, determine si $A + B$ es abierto**P3.** Estudie las siguientes sucesiones:

a) $A_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right)$

c) $C_n = \left(n(2018^{\frac{1}{n}} - 1), \left(\frac{20n+1}{20n} \right)^n \right)$

b) $B_n = \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{2n}, (2n+1) \sin\left(\frac{1}{3n}\right) \right)$

d) $D_n = \left(n \ln(1 + en^{-1}), \frac{1 - \cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \sqrt[n]{2018n} \right)$

P4. Sea (a_k) y (b_k) dos sucesiones en $\mathbb{R}^N$, tales que $a_k \rightarrow a$ y $a_k + b_k \rightarrow c$. Demuestre usando la definición que (b_k) es convergente.

Resumen

■ [Bolas abiertas y cerradas]:

Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}$$

■ [Conjunto abierto]:

Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto y las intersecciones finitas.

■ [Conjunto cerrado]:

Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.

Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado y las uniones finitas.

Observación: De manera análoga, un conjunto es abierto si su complemento es cerrado.

■ [Frontera]

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la $Fr(A)$, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$, tal que: $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$, para cualquier $r > 0$.

■ [Teorema]

A es cerrado $\iff Fr(A) \subseteq A$.

■ [Convergencia de Sucesiones]

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que (x_k) converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \|x_k - x\| \leq \varepsilon$. donde $(x_k) = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$. Además, lo anterior se suele denotar como $x_k \rightarrow x$ o bien $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

■ [Convergencia por Coordenada]

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, (x_k) converge a x si y sólo si (x_k^i) converge a x^i para todo $i = 1, \dots, n$.

■ [Sucesión Acotada]

Una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se dice acotada, si $\exists M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_k\| \leq M$$

$$\underline{P1} \mid A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$$

$$= \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$\text{Sei } \tilde{x} = (0, 0)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(\tilde{x}, \varepsilon) \not\subseteq A$$

$$\text{per } \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \in B(\tilde{x}, \varepsilon) \\ \not\subseteq A$$

$$\text{No es Abierto}$$

$$A^c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \}$$

$$\text{Sei } \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad |\bar{x}_1|, |\bar{x}_2| > 0$$

$$\text{Seo } r = \min \left\{ \frac{|\bar{x}_1|}{2}, \frac{|\bar{x}_2|}{2} \right\}$$

$$\underline{\text{Idea:}} \quad B(\bar{x}, r) \subset A^c$$

$$\underline{\text{Dem:}} \quad \text{Seo } z \in B(\bar{x}, r)$$

$$\Rightarrow \|\bar{x} - z\| < r$$

$$\Rightarrow (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 < r^2$$

$$\underline{\text{Supongamos}} \quad \text{que} \quad z_1 \cdot z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 0 \quad \vee \quad z_2 = 0$$

$$\underline{\text{Seg}} \quad z_1 = 0 \Rightarrow x_1^2 + (x_2 - z_2)^2 < r^2$$

$$\text{pero } r^2 = \min \left\{ \frac{|x_1|}{2}, \frac{|x_2|}{2} \right\} < \frac{|x_1|}{2} < x_1^2$$

$$\times \Rightarrow z_1 \neq 0 \quad (\text{de igual manera } z_2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow (z_1, z_2) \in A^c \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset A^c$$

Por lo tanto con $\bar{x}$ es cualquier
punto de $A^c \Rightarrow A^c$ Abierto $\Rightarrow A$ cerrado.

Idea

$$F_r(A) = A$$

Hay que probar que $\forall \varepsilon > 0, \forall a \in A$

$$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

$$B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

Si $F_r(A) = C$
serán $\forall a \in C$ lo mismo

Sea $w \in A \Rightarrow w_1 = 0$ o $w_2 = 0$, $w = (w_1, w_2)$

Si: $w_1 = 0$ y $w_2 \neq 0$ (Caso 1)

P.D.Q: $B(w, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

En particular $w \in B(w, \varepsilon)$ y $w \in A$
 $\Rightarrow w \in B(w, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

P.D.Q $B(w, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$$w + (\frac{\varepsilon}{2}, 0) = (\frac{\varepsilon}{2}, w_2) \quad \text{Candidate}$$

$$\|(\frac{\varepsilon}{2}, w_2) - (w_1, w_2)\| = \|(\frac{\varepsilon}{2}, 0)\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\frac{\varepsilon}{2}, w_2) \in B(w, \varepsilon)$$

$$\text{Con. } \frac{\varepsilon}{2} \neq 0 \quad \vee \quad w_2 \neq 0 \Rightarrow (\frac{\varepsilon}{2}, w_2) \in A^c$$

$$\Rightarrow B(w, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset, \quad \text{Case 1} \quad \checkmark$$

$w_1 \neq 0 \quad \vee \quad w_2 = 0$ (Case 2)

$$B(w, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \checkmark \quad \text{now } w \in A \cap B(w, \varepsilon)$$

$$w + (0, \frac{\varepsilon}{2}) = (w_1, \frac{\varepsilon}{2}) \quad (\text{Candidate})$$

$$\|(w_1, \frac{\varepsilon}{2}) - (w_1, w_2)\| = \|(0, \frac{\varepsilon}{2})\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (w_1, \frac{\varepsilon}{2}) \in B(w, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

$w_1 \neq 0 \quad \vee \quad \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$  Case 2 $\checkmark$

$$w_1 = 0 \quad \text{y} \quad w_2 = 0$$

(Caso 3)

$$B(w, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \checkmark, \text{ pues } w \in B(w, \varepsilon) \cap A$$

$$w + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{Construcción})$$

$$\| \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) - (w_1, w_2) \| = \left\| \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \right\| = \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \in B(w, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \neq 0$ ↗

Caso 3 ✓

$$\Rightarrow A \subset F_r(A)$$

Coro $A \text{ cerrado} \Rightarrow F_r(A) \subset A \Rightarrow A = F_r(A)$



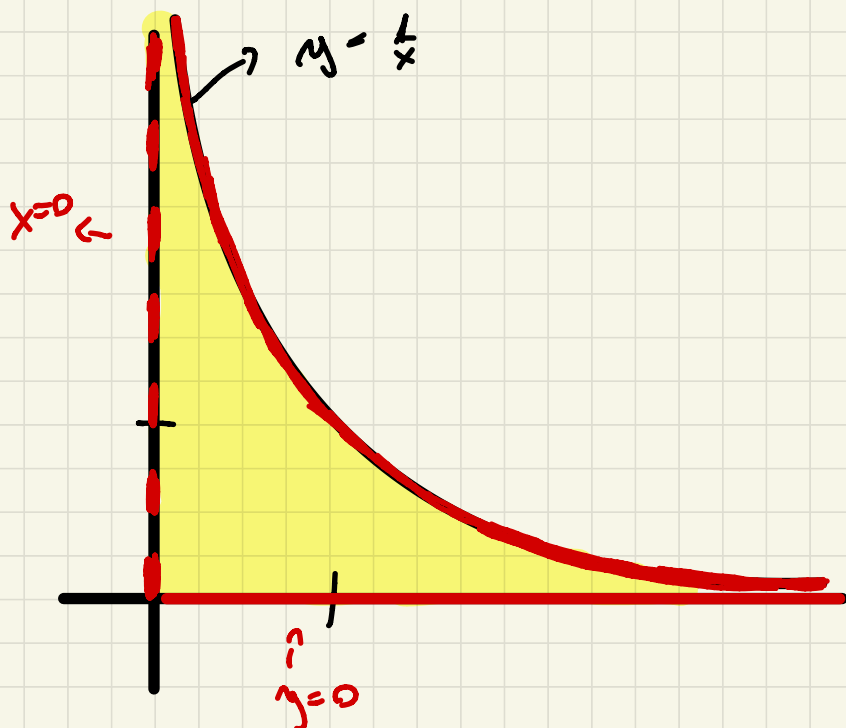
idea

Vamos

A

graficarlo

para una



Creencia No es Abierto $y > 0$ e $y = \frac{1}{x}$
 No es Cerrado $x > 0$

$$F_T(B) = x=0 \cup y=0 \cup y=\frac{1}{x}$$

Sea $b \in B$ tal que $(b_1, 0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow (b_1, \frac{\varepsilon}{2}) \in B \quad (b_1, \varepsilon)$$

$$\text{por } \|(b_1, \frac{\varepsilon}{2}) - (b_1, b_2)\| = \|(0, \frac{\varepsilon}{2})\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (b_1, \frac{\epsilon}{2}) \in B(b, \epsilon) \\ \notin B$$

$$\Rightarrow B(b, \epsilon) \not\subseteq B \text{ para ningún } \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow B \text{ no es Abierto}$$

$$\text{Sea } b \in B^c \text{ tal que } (0, b_2)$$

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow (\frac{\epsilon}{2}, b_2) \in B(b, \epsilon)$$

$$\text{por } \|(\frac{\epsilon}{2}, b_2) - (b_1, b_2) \| = \| (\frac{\epsilon}{2}, 0) \| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$\Rightarrow (\frac{\epsilon}{2}, b_2) \in B(b, \epsilon) \\ \notin B^c \quad (\in B)$$

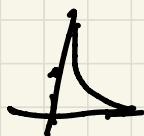
$$\Rightarrow B^c \text{ No es Abierto,}$$

$$\Rightarrow B \text{ no es Cerrado}$$

$\Rightarrow B$ is a finite metric space

Proof for $\text{Fr}(B) = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{y=\frac{1}{x}\}$

Case 1 $\{x=0\}$



Let $w = (0, w_2) \in B^c$

$$\Rightarrow B(w, \epsilon) \cap B^c \neq \emptyset$$

Note $m = \min\{\epsilon, \frac{1}{w_2}\}$

Take $(\frac{m}{2}, w_2) \in \underline{B(w, \epsilon)} \cap B$

(Euclidean distance)
 $\hookrightarrow w_2 < \epsilon$

$$\frac{m}{2}, w_2 > 0 \checkmark$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{(\frac{1}{w_2})} = w_2 \rightarrow \in B$$

$$\Rightarrow B(w, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$$

Case 1 $\checkmark$

Case 2

$\{y=0\}$. Let $(w_1, 0) \in B$

$$\Rightarrow B(w, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$$

Idem $(w_1, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B(w_1, \varepsilon) \cap B^c$

Cono $-\frac{\varepsilon}{2} < 0 \Rightarrow \in B^c$

$$\| (w_1, -\frac{\varepsilon}{2}) - (w_1, w_2) \| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \in B(w_1, \varepsilon) \Rightarrow B(w_1, \varepsilon) \cap B^c \neq \emptyset$$

Case 3 $\{y = \frac{1}{x}\}$

$$w = (w_1, \frac{1}{w_1}) \in B \Rightarrow B(w_1, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

Sea $w' = (w_1, \frac{1}{w_1} + \frac{\varepsilon}{2})$

$$\|w - w'\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow w' \in B(w_1, \varepsilon) \cap B^c \neq \emptyset$$

$$\frac{1}{w_1} + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{w_1} \Rightarrow \notin B$$

Finalmente $F_r(B) = \{x=0\}, \{y=0\}, \{y=\frac{1}{x}\}$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$$

Idea: No es Abierto, ni cerrado.

$$\text{Sea } w \in C \Rightarrow w_1 \in \mathbb{Q} \text{ y } w_2 \in \mathbb{R}$$

Recordemos que $\forall p, q \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ y } \exists i \in \mathbb{Q}^c$

$$\text{tal que } p < r < q \text{ y } p < i < r$$

Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Q}^c$

$$(\forall \varepsilon > 0) \exists i \in \mathbb{Q}^c \text{ tal que } i \in [w_1 - \frac{\varepsilon}{2}, w_1 + \frac{\varepsilon}{2}]$$

$$\Rightarrow (i, w_2) \in B(w, \varepsilon) \text{ y } \notin C$$

$\Rightarrow C$ no es Abierto

De igual manera. Sea $z \in \mathbb{C} \rightarrow z_1 \in \mathbb{Q}, z_2 \in \mathbb{R}$

($\forall \varepsilon > 0$) $\exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in [z_1 - \frac{\varepsilon}{2}, z_1 + \frac{\varepsilon}{2}]$

$\Rightarrow (r, z_2) \in B(z, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ no es Abierto.

Falta $F_r(\mathbb{C})$

Indic. es Todo $\mathbb{R}^2$

Sea $z = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

($\forall \varepsilon > 0$) $\exists r \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{R}^c$ tal que

$r, i \in [x_1 - \frac{\varepsilon}{2}, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}]$

$\Rightarrow (r, x_2) \in B(z, \varepsilon) \cap \mathbb{C}$ (Pues $r \in \mathbb{Q}$)

$(i, x_2) \in B(z, \varepsilon) \cap \mathbb{C}^c$ (Pues $i \in \mathbb{R}^c$)

Por lo tanto $\forall z \in \mathbb{R}^2 \quad z \in F_r(c)$

$$\Rightarrow F_r(c) = \mathbb{R}^2$$

$$d) D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \}$$

Idea es clara

Sea $w \in D \quad \forall \epsilon > 0 \quad w_1 = w_2$

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (w_1 - \frac{\epsilon}{2}, w_2) \in B(w, \epsilon) \\ \notin D$$

$\Rightarrow B(w, \epsilon) \not\subset D \Rightarrow D$ no es Abierto

P.D.R D^c es abierto

Sea $z \in D^c$

$$\Rightarrow z_1 > z_2$$

$$\text{Sea } r = \frac{z_1 - z_2}{2} > 0$$

$$\text{Sea } x \in B(z, r)$$

$$\Rightarrow (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 < r^2$$

$$\Rightarrow |x_1 - z_1| < r = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{2} < x_1 - z_1 < \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{2} < x_1 < \frac{3z_1 - z_2}{2}$$

También

$$\Rightarrow |x_2 - z_2| < r = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 - z_2 < \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 < \frac{z_1 + z_2}{2} < x_1$$

$$\Rightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow x \notin D^c$$

$$\Rightarrow B(z, r) \subset D^c, \forall z \in D^c$$

$$\Rightarrow D^c \text{ es Abierto} \Rightarrow D \text{ cerrado}$$

Proposición $\text{Fr}(D) = \{x=y\}$

Si: $z = (z_1, z_2)$

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (z_1, z_2 + \varepsilon) \in B(z, \varepsilon) \cap D$$

$$(z_1 - \varepsilon, z_2) \in B(z, \varepsilon) \cap D^c$$

$$\Rightarrow \{x=y\} \text{ es Parte de la frontera}$$

Si: $\{x \neq y\} \exists B(z, \frac{|x-y|}{2}) \subset D \text{ o } D^c$

$$\Rightarrow \text{Fr}(D) = \{x=y\}$$

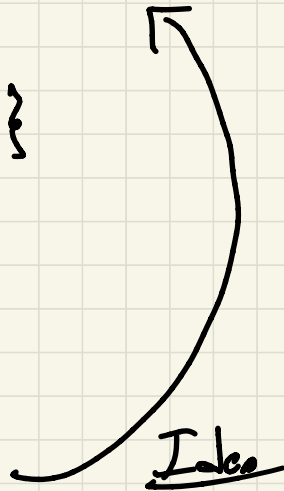
$$\boxed{\text{PZ}} \text{ a) } \text{Conv } A \text{ es Aberto} \Rightarrow \forall a \in A$$

$$\exists \tilde{\delta} > 0 \quad \forall \gamma \quad B(a, \tilde{\delta}) \subset A$$

$$\text{Sea } \gamma \in A + \{b\}$$

$$\Rightarrow \gamma = a + b$$

$$\Rightarrow \gamma - b = a \in A$$



$$\text{Sea } B(\gamma, \tilde{\delta})$$

$$\Rightarrow \text{Si } w \in B(\gamma, \tilde{\delta})$$

$$\|w - \gamma\| < \tilde{\delta}$$

$$\Rightarrow \|w - b - (\gamma - b)\| < \tilde{\delta}$$

$$\Rightarrow (w-b) \in B(\underbrace{y-b}_{\in A}, \delta) \subset A$$

$$\Rightarrow w-b \in A$$

$$\Rightarrow \underbrace{w-b+b}_w \in A + \{b\}$$

$$\Rightarrow B(y, \tilde{\delta}) \subset A + \{b\} \quad \forall y \in A + \{b\}$$

$$\Rightarrow A + \{b\} \text{ es Abierto}$$

$$\boxed{b} \text{ Como } A+B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}$$

y la unión arbitraria de Abiertos es Abierto.

P3) Auxiliar 3

Pu $\forall \varepsilon > 0$, si $a_n \rightarrow a \Rightarrow \forall N \geq N_0$ $\|a_n - a\| < \varepsilon$

De nuevo similar $a_n + b_n \rightarrow c \Rightarrow \forall N \geq N_0^2$ $\|a_n + b_n - c\| < \varepsilon$

$$\text{Sea } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\begin{aligned} \forall N \geq \max(N_1, N_2) \quad \|b_n - (c - a)\| &= \|a_n + b_n - a_n - (c - a)\| \\ &= \|a_n + b_n - c - (a_n - a)\| \\ &\leq \underbrace{\|a_n + b_n - c\|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|a_n - a\|}_{\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow (c - a) \quad \text{por de aquí}$$