MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 2: Conjuntos y Sucesiones

17 de marzo de 2022

P1. Para los siguientes conjuntos estudie sin son abiertos y/o cerrados. Luego calcule sus fronteras.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \geq 0, y \leq x^{-1}\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in Q\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$

P2. Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se define

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

a) Sea $b \in B$. Demuestre que si A es abierto entonces $A + \{b\}$ es abierto.

b) Suponga que A es abierto, determine si $A + B$ es abierto

P3. Estudie las siguientes sucesiones:

a) $A_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)$

b) $B_n = \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{2n}, (2n + 1)\sin\left(\frac{1}{3n}\right)\right)$

c) $C_n = \left(n(2018^{\frac{1}{n}} - 1), \left(\frac{20n + 1}{20n}\right)^n\right)$

d) $D_n = \left(n\ln(1 + en^{-1}), \frac{1 - \cos(n\pi)}{(n\pi)^2}, \sqrt[n]{2018n}\right)$

P4. Sea (a_k) y (b_k) dos sucesiones en $\mathbb{R}^N$, tales que $a_k \to a$ y $a_k + b_k \to c$. Demuestre usando la definición que (b_k) es convergente.

Resumen

- [**Bolas abiertas y cerradas**]:
  Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$
$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}$$

- [**Conjunto abierto**]: Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

  Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión arbitraría de conjuntos abiertos es abierto y las intersecciones finitas.

- [**Conjunto cerrado**]: Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.
  Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección arbitraría de conjuntos cerrados es cerrado y las uniones finitas.

Observación: De manera análoga, un conjunto es abierto si su complemento es cerrado.

- [**Frontera**] Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la $Fr(A)$, es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$, tal que: $B(x, r) \cap A \neq$ y $B(x, r) \cap A^c \neq$, para cualquier $r > 0$.

- [**Teorema**] A es cerrado $\iff$ $Fr(A) \subseteq A$.

- [**Convergencia de Sucesiones**] Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que (x_k) converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si: $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \|x_k - x\| \leq \varepsilon$.donde $(x_k) = (x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^n)$. Además, lo anterior se suele denotar como $x_k \to x$ o bien $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

- [**Convergencia por Coordenada**] Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión y $x \in R^n$. Entonces, (x_k) converge a x sí y sólo sí (x_k^i) converge a x^i para todo $i = 1, \cdots, n$.

- [**Sucesión Acotada**] Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se dice acotada, si $\exists M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_k\| \leq M$$