

MA2001-7 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Ariel Perez Contreras**Auxiliar:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 1: Normas y conceptos de topología**

11 de marzo de 2022

P1. Considere $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $N_1(v)$, $N_2(v)$ normas de $\mathbb{R}^n$, determine si las siguientes funciones son o no normas:

$$a) F(x) = \sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2} \text{ donde } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$c) G(y) = \sqrt{|y_1| + |y_2| + |y_3|}$$

$$b) H(x) = |x_1| + \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$$

$$d) J(v) = N_1(v) + N_2(v)$$

P2. Diremos que dos normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ son equivalentes sobre un espacio vectorial E si existen dos constantes c_1 y c_2 tal que $\forall x \in E$ se cumple

$$\|x\| \leq c_1 \|x\|_*$$

$$\|x\|_* \leq c_2 \|x\|$$

También, definimos las siguientes normas $\|x\|_p$ y $\|x\|_\infty$ como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

Pruebe que ambas normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

P3. Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, se definen las bolas abiertas centradas en x_0 y de radio r como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

De forma similar se define la bola cerrada como:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

El objetivo de esta pregunta es visualizar en $\mathbb{R}^2$ bolas abiertas y cerradas cuando se varía la norma que se utiliza para definirla. Para ello, dibuje las bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}^2$ utilizando $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Propuestos

1. Sea $f \in (\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}))$, muestre que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f''(t)| + |f'(0)| + |f(0)|$$

es norma. Calcúlela para el caso particular donde $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{N} \times \mathcal{M}}(\mathbb{R})$, muestre que

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |a_{ij}|^2}$$

es norma. Posteriormente estudie $\sqrt{\text{traza}(A^t A)}$ y encuentre una relación con la norma.

Resumen

- **[Normas]:** Si se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ y al vector $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define las normas como una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple:

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Entre los ejemplos más importantes se encuentra la norma p que se define como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Donde $p \geq 1$ y x_i es la coordenada i -ésima del vector x .

- **[Producto interno]:** Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se dice que la aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

es un producto interno *ssi* cumple:

1. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq \vec{0}$

Observación: No es difícil probar que la función $\sqrt{\langle x, x \rangle}$, define una norma sobre $\mathbb{R}^n$. En particular notar que la $\|\cdot\|_2$ se define con esta última operación como:

$$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

- **[Desigualdad de Cauchy-Schwartz]:** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Donde $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde x_i, y_i son las componentes i -ésimas de los vectores x e y respectivamente.

- **[Equivalencia de normas]:** Se dice que dos normas $(\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b)$ son equivalentes si $\exists k_1, k_2 > 0$ tal que:

$$k_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq k_2 \|x\|_b \quad \forall x \in E$$

Donde E es el espacio vectorial donde se definieron las normas respectivas.

- **[Distancia]:** Sea M un conjunto, se dice que la aplicación $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ *ssi*:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$

Observación: Para cualquier norma, la aplicación $d(x, y) = \|x - y\|$ define una distancia.

- **[Bolas abiertas y cerradas]:**

Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}$$

- **[Conjunto abierto]:** Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión de conjuntos abiertos es abierto.

- **[Conjunto cerrado]:** Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.

Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrado.

Observación: De manera análoga, un conjunto es abierto si su complemento es cerrado.

P1. Considere $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $N_1(v)$, $N_2(v)$ normas de $\mathbb{R}^n$, determine si las siguientes funciones son o no normas:

a) $F(x) = \sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2}$ donde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $G(y) = \sqrt{|y_1| + |y_2| + |y_3|}$

b) $H(x) = |x_1| + \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$

d) $J(v) = N_1(v) + N_2(v)$

a) Opción 1

$$F(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} (ax_1)^2 &\geq 0 \\ (bx_2)^2 &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2} \quad \text{esta bien definida}$$

$$\sqrt{\cdot}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \Rightarrow F(x) = \sqrt{\cdot} \geq 0$$

$$F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$$

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= \sqrt{(a\lambda x_1)^2 + (b\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 ((ax_1)^2 + (bx_2)^2)} \\ &= |\lambda| \sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2} = |\lambda| F(x) \end{aligned}$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0)$$

$$\Leftarrow F(0, 0) = \sqrt{(a \cdot 0)^2 + (b \cdot 0)^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2} = 0 \quad / ()^2$$

$$\Rightarrow (ax_1)^2 + (bx_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (ax_1)^2 = -(bx_2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (ax_1)^2 = 0 = -(bx_2)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 = x_2$$

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

Esto es

$$\sqrt{(a(x_1+y_1))^2 + (b(x_2+y_2))^2} \leq \sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2} + \sqrt{(ay_1)^2 + (by_2)^2}$$

Esto es equivalente $()^2$

$$2ax_1y_1 + 2b^2x_2y_2 \leq 2\sqrt{(ax_1)^2 + (bx_2)^2} \sqrt{(ay_1)^2 + (by_2)^2}$$

No tenemos que usando los vectores Auxiliares

$$v_1 = (ax_1, bx_2) \text{ y } v_2 = (ay_1, by_2)$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ax_1ay_1 + bx_2by_2$$

$$\|v_1\|_2 = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2}$$

$$\|v_2\|_2 = \sqrt{a^2y_1^2 + b^2y_2^2}$$

$$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \leq \|v_1\|_2 \cdot \|v_2\|_2$$

C.S

que es justamente lo que se pide

$$\Rightarrow F(x) \text{ es Norma}$$

Opción 2

Notar que $F(x) = \|h(x)\|_2$

Con $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longrightarrow (ax, by)$$

$$h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y)$$

y si x e y son tales que:

$$h(x) = h(y) \Rightarrow \begin{matrix} ax_1 = ay_1 \\ bx_2 = by_2 \end{matrix} \Rightarrow x = y$$

$h(x)$ es inyectiva

$$\text{Como } h(0) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

En general si h es lineal e inyectiva $\|h(x)\|$ es una norma

Vamos a probar:

$$F(x) \geq 0$$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \underline{\mathbb{R}_+} \Rightarrow \|h(x)\|_2 \geq 0$$

$$F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$$

$$F(\lambda x) = \|h(\lambda x)\|_2 \stackrel{h \text{ linear}}{=} \|\lambda h(x)\|_2 \stackrel{\|\cdot\|_2 \text{ norma}}{=} |\lambda| \|h(x)\|_2 \\ = |\lambda| F(x)$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \|h(x)\|_2 = 0 \stackrel{\|\cdot\|_2 \text{ norma}}{\Leftrightarrow} h(x) = 0 \stackrel{\text{injection}}{\Leftrightarrow} x = 0$$

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

$$F(x+y) = \|h(x+y)\|_2 \stackrel{h \text{ linear}}{=} \|h(x) + h(y)\|_2$$

$$\leq \|h(x)\|_2 + \|h(y)\|_2 = F(x) + F(y)$$

$\|\cdot\|_2$
es norma

b) Basta notar que $\sqrt[3]{}$ puede ser negativa

$$\Rightarrow H(0, x_2) = 0 + \sqrt[3]{x_2^3} = x_2$$

$$H(0, -1) = -1 < 0$$

$\Rightarrow H(x)$ no es norma

c) Pueden notar que cumple varias propiedades

$$\text{Pero } \phi(\lambda y) = \sqrt{|\lambda y_1| + |\lambda y_2| + |\lambda y_3|}$$

$$= \sqrt{|\lambda|} \cdot \sqrt{|y_1| + |y_2| + |y_3|}$$

$$= \sqrt{|\lambda|} \phi(y)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{norm}} \quad \lambda = 2 \quad e \quad y = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \Gamma((1, 1, 1)) = \sqrt{3}$$

$$\Gamma(2 \cdot (1, 1, 1)) = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\lambda y) \neq \lambda \Gamma(y)$$

No es normal

$$d) \quad \boxed{J(r) \geq 0}$$

$$N_1(r) \geq 0 \quad y \quad N_2(r) \geq 0$$

$$\Rightarrow N_1(r) + N_2(r) \geq 0$$

$$J(r) \geq 0$$

$$\boxed{J(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0}$$

$$J(v) = 0 \Leftrightarrow N_1(v) + N_2(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{0}_{N_1, N_2 \text{ Norms}} \leq N_1(v) = -N_2(v) \leq 0$$

$$\Rightarrow N_1(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

N_1 norm

$\text{Filt}_1 \Leftarrow$

$$J(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$$

$J(\lambda v) = |\lambda| J(v)$

$$\begin{aligned} J(\lambda v) &= N_1(\lambda v) + N_2(\lambda v) \\ &= |\lambda| N_1(v) + |\lambda| N_2(v) \end{aligned}$$

N_1, N_2
Norms

$$= |\lambda| J(v)$$

$J(x+y) \leq J(x) + J(y)$

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \quad (1)$$

$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \quad (2)$$

Usando (1) y (2)

$$J(x+y) \leq \underbrace{N_1(x) + N_1(y)}_{J(x) + J(y)} + N_2(x) + N_2(y)$$

P2 Por definición

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

y por otro lado existe un $\tilde{i}$
tal que $|x_{\tilde{i}}| = \|x\|_\infty$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty = |x_{\tilde{i}}|$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty^p = |x_i|^p$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^p \quad (\text{Ser } p\text{-norm positivos})$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$

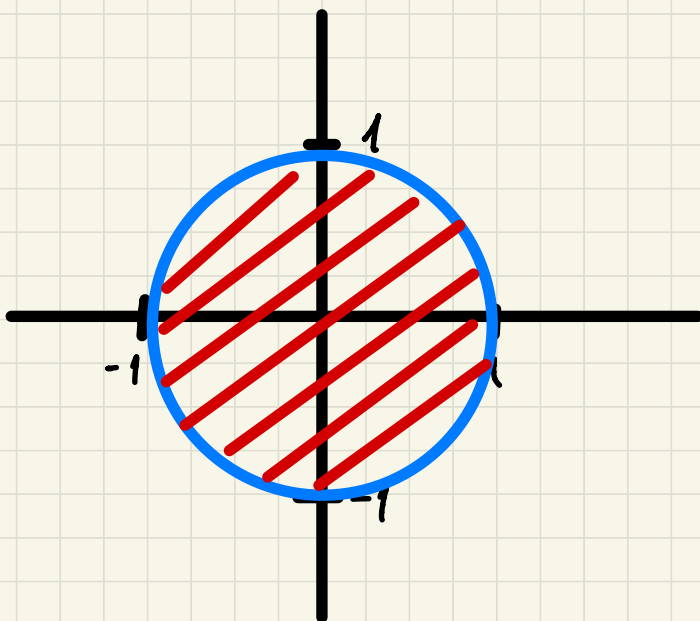
Por otro lado

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |x_i|^p &\leq \sum_{i=1}^N \|x\|_\infty^p \\ &\leq N \cdot \|x\|_\infty^p \end{aligned}$$

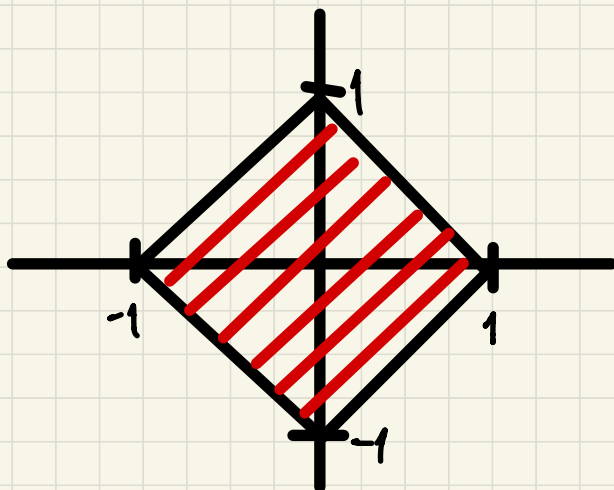
$$\Rightarrow \|x\|_1 \leq N^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

Con lo que se concluye que son equivalentes

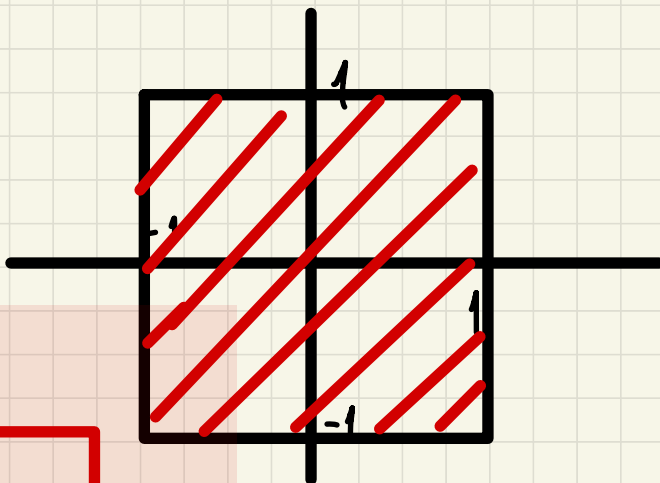
P3 $B(0,1)$ e_n $\|\cdot\|_2$



$B(0,1)$ e_n $\|\cdot\|_1$



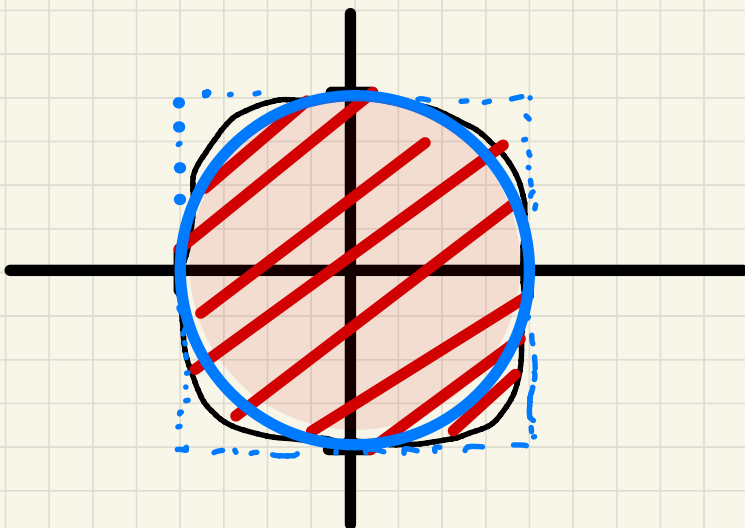
$B(0,1)$ en $\|\cdot\|_\infty$



$B(0,1)$

en $\|\cdot\|_p$

para algum $p \geq 2$



1. Sea $f \in (C^2([0, 1], \mathbb{R}))$, muestre que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f''(t)| + |f'(0)| + |f(0)|$$

es norma. Calcúlela para el caso particular donde $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$.

$$\|f\| \geq 0$$

$$\forall t \quad |h(t)| \geq 0$$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f''(t)| \geq 0 \quad \|f'(0)\| \geq 0$$

$$|f(0)| \geq 0$$

Sumando

$\leadsto$

$$\Rightarrow \|f\| \geq 0$$

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$$

$$\|\lambda f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |(\lambda f)''(t)| + |(\lambda f)'(0)| + |(\lambda f)(0)|$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

/ la derivada es lineal

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \| \lambda f \| &= \sup_{t \in [0,1]} |\lambda f''(t)| + |\lambda f'(0)| + |\lambda f(0)| \\
&= \sup_{t \in [0,1]} |\lambda| \cdot |f''(t)| + |\lambda| |f'(0)| + |\lambda| |f(0)| \\
&= |\lambda| \left(\quad \quad \quad \right) \\
&= |\lambda| \|f\|
\end{aligned}$$

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \quad (\text{Função nula})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f \equiv 0 &\Rightarrow f(0) = 0 \\
&\Rightarrow f' = f' \equiv 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \\
&\quad f''(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f\| = 0$$

$$\Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)| = 0$$

$$|f(0)| = 0 \leadsto |f'(0)| = 0$$

$$\text{Si: } \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = 0 \Rightarrow f''(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f'(t) = C + 0 = C \quad (\text{Intégration})$$

$$\Rightarrow f(t) = Ct + D \quad (\text{Intégration, constante})$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$f'(t) = C \quad \text{et} \quad f'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\|f+g\| = \sup_{t \in [0,1]} |(f+g)''(t)| + |(f+g)'(0)| + |(f+g)(0)|$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} |f'(t) + g'(t)| + |f'(0) + g'(0)| + |f(0) + g(0)|$$

Por D. Δ del valor absoluto

$$\Rightarrow |h(t) + a(t)| \leq |h(t)| + |a(t)| \quad \forall t \in [0,1]$$

En particular para $t=0$

$$\text{Como } |h(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow |h(t) + a(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |h(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |a(t)|$$

Usando esto $\rightarrow$ D. Δ

$$\begin{aligned} \|f+g\| &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |g'(t)| + |f'(0)| + |g'(0)| \\ &\quad + |f(0)| + |g(0)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Para este caso particular $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$

$$f(0) = 1$$

$$f'(t) = -\sin(t) + \cos(t) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -\cos(t) - \sin(t)$$

$$|f''(t)| = |-(\cos(t) + \sin(t))|$$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |-(\cos(t) + \sin(t))| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \|f\| = 2 + \sqrt{2}$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{N \times M}(\mathbb{R})$, muestre que

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |a_{ij}|^2}$$

es norma. Posteriormente estudie $\sqrt{\text{traza}(A^t A)}$ y encuentre una relación con la norma.

$$\|A\|_F \geq 0$$

- Es una norma por lo que este tipo de norma

$$\|\lambda A\|_F = |\lambda| \|A\|_F$$

$$\begin{aligned} \|\lambda A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |\lambda a_{ij}|^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |a_{ij}|^2} \end{aligned}$$

$$= |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2} = |\lambda| \|A\|_F$$

$$\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |a_{ij}| = 0 \quad \forall i, j$$

$$\Rightarrow \|A\|_F = 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_F = 0 \rightarrow 0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad |a_{ij}|^2 = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$$

$$\|A+B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij} + b_{ij}|^2}$$

Vamos a Hacer un Truquito

Obs: Con este Truquito se podía partir

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1M} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{iM} \\ \vdots \\ a_{NM} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{A}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |a_{ij}|^2} = \|A\|_F$$

Similar con B y $\tilde{B}$

$$\Rightarrow \|\tilde{A}\|_2 = \|A\|_F$$

$$\|\tilde{B}\|_2 = \|B\|_F$$

$$\|\tilde{A} + \tilde{B}\|_2 = \|A + B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |a_{ij} + b_{ij}|^2}$$

$$\Rightarrow \|A + B\|_F = \|\tilde{A} + \tilde{B}\|_2 \leq \|\tilde{A}\|_2 + \|\tilde{B}\|_2 = \|A\|_F + \|B\|_F$$

$\Rightarrow$ Se cumple D.1 y es norma

Argumento que es igual a una norma También es válido

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^n a_{ih} \cdot b_{hj}$$

$$(B^t)_{ij} = b_{ji}$$

Si reemplazamos A por B^t

$$\Rightarrow (B^t \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^n b_{hi} \cdot b_{hj}$$

$$\text{La traza} \left(\begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n e_{ii}$$

$$\Rightarrow \text{traza} (B^t \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n b_{hi}^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\text{traza} (A^t \cdot A)} = \|A\|_F$$