MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 1: Normas y conceptos de topología

11 de marzo de 2022

P1. Considere $x \in R^2$, $y \in R^3$, $v \in R^n$ y $N_1(v)$, $N_2(v)$ normas de $\mathbb{R}^n$, determine si las siguiente funciones son o no normas:

a) $F(x) = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2}$ donde $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $H(x) = |x_1| + \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$

c) $G(y) = \sqrt{|y_1| + |y_2| + |y_3|}$

d) $J(v) = N_1(v) + N_2(v)$

P2. Diremos que dos normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ son equivalentes sobre un espacio vectorial E si existen dos constantes c_1 y c_2 tal que $\forall x \in E$ se cumple

$$\|x\| \leq c_1 \|x\|_*$$
$$\|x\|_* \leq c_2 \|x\|$$

También, definimos las siguientes normas $\|x\|_p$ y $\|x\|_\infty$ como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right) \ , \ \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

Pruebe que ambas normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

P3. Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, se definen las bolas abiertas centradas en x_0 y de radio r como:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - x_0\| < r\}$$

De forma similar se define la bola cerrada como:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - x_0\| \leq r\}$$

El objetivo de esta pregunta es visualizar en $\mathbb{R}^2$ bolas abiertas y cerradas cuando se varía la norma que se utiliza para definirla. Para ello, dibuje las bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}^2$ utilizando $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Propuestos

1. Sea $f \in (\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, muestre que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)| + |f'(0)| + |f(0)|$$

es norma. Calcúlela para el caso particular donde $f(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{N}\times\mathcal{M}}(\mathbb{R})$, muestre que

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|^2}$$

es norma. Posteriormente estudie $\sqrt{traza(A^tA)}$ y encuentre una relación con la norma.

Resumen

- [**Normas**]: Si se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ y al vector $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define las normas como una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple:
  - $\|x\| \geq 0$
  - $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \vec{0}$
  - $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
  - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  Entre los ejemplos más importantes se encuentra la norma p que se define como:

  $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

  Donde $p \geq 1$ y x_i es la coordenada i-ésima del vector x.

- [**Producto interno**]: Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se dice que la aplicación

  $$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

  es un producto interno *ssi* cumple:
  1. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
  2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
  3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
  4. $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall x \neq \vec{0}$

  Observación: No es difícil probar que la función $\sqrt{\langle x, x\rangle}$, define una norma sobre $\mathbb{R}^n$. En particular notar que la $\|\cdot\|_2$ se define con esta última operación como:

  $$\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$$

- **[Desigualdad de Cauchy-Schwartz]:** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

  $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

  Donde $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, donde x_i, y_i son las componentes i-ésimas de los vectores x e y respectivamente.

- [**Equivalencia de normas**]: Se dice que dos normas $(\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b)$ son equivalentes si $\exists k_1, k_2 > 0$ tal que:

  $$k_1\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq k_2\|x\|_b \qquad \forall x \in E$$

  Donde E es el espacio vectorial donde se definieron las normas respectivas.

- [**Distancia**]: Sea M un conjunto, se dice que la aplicación $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ *ssi*:
  1. $d(x, y) \geq 0 \;\; \forall x, y \in M$
  2. $d(x, y) = d(y, x)$
  3. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
  4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \;\; \forall x, y, z \in M$

  Observación: Para cualquier norma, la aplicación $d(x, y) = \|x - y\|$ define una distancia.

- [**Bolas abiertas y cerradas**]:

  Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un espacio normado, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se definen las bolas centradas en x_0 de radio r abiertas y cerradas, respectivamente, como:

  $$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$
  $$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq r\}$$

- [**Conjunto abierto**]: Se dice que un conjunto A es abierto *ssi*:

  $$\forall x \in A, \exists r > 0, \text{ tal que } B(x, r) \subset A$$

  Por ejemplo, toda bola abierta es un conjunto abierto. La unión de conjuntos abiertos es abierto.

- [**Conjunto cerrado**]: Un conjunto A es cerrado si A^c es abierto.

  Toda bola cerrada es un conjunto cerrado. La intersección de conjuntos cerrados es cerrado.

  Observación: De manera análoga, un conjunto es abierto si su complemento es cerrado.