Auxiliar 12 CVV: Optimización

P1

$$\mathcal{H}^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 1,\ z > 0\}$$

(a) Determine $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q. $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.

Sol:

Para $f(x,y)$ tenemos que $Gr(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$. Esto nos sugiere despejar z:

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1 + x^2 + y^2 \underset{z>0}{\Rightarrow} z = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ es tal que $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.

(b) Pruebe que la ec. del plano tangente a $\mathcal{H}^+$ en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ está dada por $zz_0 - xx_0 - yy_0 = 1$.

Dem:

En realidad, nos están pidiendo el hiperplano tangente a $Gr(f)$ en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Sabemos que la ecuación de este plano viene dada por $z = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x,y) - (x_0,y_0) \rangle$.

Encontremos $\nabla f(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad (\text{simétrico})$$

Entonces, la ec. del plano será

$$z = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x,y)-(x_0,y_0) \rangle$$

$$= \sqrt{1+x_0^2+y_0^2} + \left\langle \begin{pmatrix} x_0/\sqrt{1+x_0^2+y_0^2} \\ y_0/\sqrt{1+x_0^2+y_0^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{1+x_0^2+y_0^2} + \frac{(x-x_0)x_0}{\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}} + \frac{(y-y_0)y_0}{\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}}$$

$$= z_0 + \frac{(x-x_0)x_0}{z_0} + \frac{(y-y_0)y_0}{z_0}$$

$$\Rightarrow z z_0 = z_0 + x x_0 - x_0^2 + y y_0 - y_0^2$$

$$= x x_0 + y y_0 + \underbrace{(z_0 - x_0^2 - y_0^2)}_{=1}$$

$$\Rightarrow z z_0 - x x_0 - y y_0 = 1$$

$\boxed{/}$

P2 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^3 + x^2 + 4y^2 - 4x + 5y + 10$

(a) Ptos críticos de f.

Sol:

f es diferenciable en todo f así que sus puntos críticos serán sólo aquellos tales que $\nabla f(x_0,y_0) = 0$. Encontremos $\nabla f(x,y)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 8y + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 3y^2+8y+5 \end{pmatrix}$$

Así, impo ndremos $\nabla f(x,y) = 0$, i.e. $\begin{pmatrix} 2x-4 \\ 3y^2+8y+5 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 3y^2+8y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$3y^2+8y+15=0 \Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4(3)(15)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-8 \pm 2}{6} \begin{cases} y = -5/3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Así, los ptos críticos son $(2,-5/3)$ y $(2,-1)$.

(b) Clasificarlos

Sol:

Necesitamos estudiar la matriz Hessiana $Hf(x,y)$. Encontrémosla.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \underset{f \in C^2}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y+8$$

$$\Rightarrow Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y_0+8 \end{pmatrix}$$

En $(2,-5/3) \Rightarrow Hf(2,-5/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ no es s.d.p. ni d.p.

pues sus valores propios $2, -2$ son positivos y negativos.

En $(2,-1)$, $Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es d.p. pues sus valores propios

2 son >0.

$\therefore$ $(2,-5/3)$ es pto. silla y $(2,-1)$ es mínimo local estricto.

(c) Justificar si los max/mín son globales.

Sol:

El único mínimo local es $(2,-1)$, pero no es global. La intuición es la siguiente: Si $f(x,y) = y^3+x^2+4y^2-4x+5y+10$ el término y^3 nos sugiere que para y muy negativo, $f(x,y)$ será muy negativo.

Queremos encontrar (x_0,y_0) t.q. $f(x_0,y_0) < f(2,-1) = 4$.

Fijemos, por decir algo, $x=0 \Rightarrow f(y,0) = y^3+4y^2+5y+10$. Tomando $y=-10$ (para asegurarnos), tenemos que

$$
\begin{aligned}
f(-10,0) &= (-10)^3+4\cdot 10^2+5(-10)+10 \\
&= -1000+400-50+10 \\
&= -640 < f(2,-1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $(2,-1)$ no es mínimo global.

$\boxed{P3}$ $f: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y-z$ con $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

Demostrar que f alcanza su mínimo y calcularlo.

Dem:

Estamos en un problema con restricciones <u>con igualdad</u>. Aquí, $\operatorname{int} S = \phi$ y no podemos "hacer cálculo": los criterios de primer y segundo orden no nos sirven. Para este tipo de problemas usamos multiplicadores de Lagrange.

(Buena referencia: T. Apostol "Calculus" Vol. 2 Cap 9.14")

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x,y,z) = x+y-z \\ \text{s.a.} & g(x,y,z) = 0 \end{array} \qquad \text{con } g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

Primero que todo, P) tiene solución porque f es continua y S^3 compacto.

Para encontrar puntos críticos, queremos resolver el sistema

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0) \qquad \text{(Una restricción)}$$

Encontremos ∇f y ∇g.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial g/\partial x \\ \partial g/\partial y \\ \partial g/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \longrightarrow \text{De rango 1 (cantidad de restricciones)}$$

Así, obtenemos que si (x_0, y_0, z_0) es pto. crítico $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$$

Así, obtenemos el sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x_0 & (1) \\ 1 = 2\lambda y_0 & (2) \\ -1 = 2\lambda z_0 & (3) \\ 1 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 & (4) \end{cases}$$

Haciendo $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 \Rightarrow 3 = 4\lambda^2 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 4\lambda^2$

$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ multiplicadores de Lagrange.

Remplazando arriba obtenemos dos puntos críticos:

(i) $x_0 = y_0 = \underset{\lambda = \sqrt{3}/2}{\frac{1}{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $x_0 = y_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ptos críticos: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \longrightarrow$ máximo.

$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} \longrightarrow$ mínimo

P4) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa de clase $\mathcal{C}^1$ y $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ acotada t.q.

$$\lim_{n\to\infty} \nabla f(x_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

(a) Por convexidad, $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x+\lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

Haciendo $\lambda \to 0$ obtenemos que

$$Df(x; y-x) \leq f(y) - f(x)$$

Pero $Df(x;y-x) = \langle \nabla f(x), y-x\rangle$, por lo que probamos que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle$$

(b) P.D. $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $f(\bar{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Dem:

Como $(x_n)_n$ es acotada, tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a algún $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Como $f \in \mathcal{C}^1$, ∇f es continua por coordenadas y $x_{n_k} \to \bar{x} \Rightarrow \nabla f(x_{n_k}) \longrightarrow \nabla f(\bar{x})$. Pero $\nabla f(x_{n_k}) \longrightarrow 0$, por lo que necesariamente $\nabla f(\bar{x}) = 0$. La segunda parte se concluye usando la parte (a): $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq f(\bar{x}) + \underbrace{\langle \nabla f(\bar{x}), y-\bar{x}\rangle}_{=0} \geq f(\bar{x})$ $\therefore f(\bar{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$

(c) Conclusión.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(\bar{x}) \leq f(x_n) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Por otro lado, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(\bar{x}) \geq f(x_n) + \underbrace{\langle \nabla f(x_n), \bar{x} - x_n \rangle}_{\longrightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) \geq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$