Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Angel Pardo
Otoño 2022

Auxiliar 12: Optimización

Auxiliares : Martín Berríos, Luciano Villarroel

P1. Considere la superficie $\mathcal{H}^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{H}^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 - x^2 - y^2 = 1,\, z > 0\}$$

(a) Determine $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Gr(f) = \mathcal{H}^+$.
Indicación: Recuerde que $Gr(f) = \{(u, v) \,:\, v = f(u),\, u \in \Omega\}$ denota el grafo de f.

(b) Pruebe que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{H}^+$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{H}^+$ está dada por

$$zz_0 - xx_0 - yy_0 = 1$$

P2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^3 + x^2 + 4y^2 - 4x + 5y + 10$

(a) Encuentre los puntos críticos de f.

(b) Justifique si cada uno corresponde a un mínimo local, máximo local o punto silla.

(c) Justifique si cada mínimo o máximo local de f son globales.

P3. Muestre que la función $f(x, y, z) = x + y - z$ alcanza su mínimo en la esfera unitaria $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y calcúlelo.

P4. **[Propuesto]** Una función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *convexa* si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(x + \lambda(y - x) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado.

Teorema. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa de clase $\mathcal{C}^1$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión acotada que satisface

$$\lim_{n\to\infty} \nabla f(x_n) = 0$$

Entonces $(x_n)_n$ es una sucesión minimizante de f, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

Para esto, proceda de la siguiente forma:

(a) Usando la convexidad de f, demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$.

(b) Pruebe que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Más aún, demuestre que $f(\bar{x}) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$
Hint: $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.

(c) Concluya el resultado usando la parte (a) para $x, y \in \mathbb{R}^n$ adecuados.