MA1102-1: Algebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 12

P1. [C3, 2014-2]

a) Demuestre las siguientes implicancias:

I) Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica y definida positiva, entonces A es invertible y A^{-1} es simétrica y definida positiva.

II) Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es simétrica y definida positiva y $Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces QAQ^T es simétrica y definida positiva.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica y definida positiva y B la matriz por bloques de $2n \times 2n$,

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

entonces:

I) Dado $x \in \mathbb{R}^{2n}$ con $x \neq 0$, descomponga $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, con $y, z \in \mathbb{R}^n$ y demuestre que

$$x^T B x = (y+z)^T A (y+z)$$

II) Demuestre que B es semidefinida positiva pero NO definida positiva

c) **[Ex, 2012-2]**

I) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica, cuyos únicos valores propios son 2 y -2. Demuestre que $A + 3I$ es definida positiva

II) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simetrica, definida positiva y sea $\lambda_1 > 0$ su menor valor propio. Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T B x \geq \lambda_1 x^T x$$

Indicacion: Considere $B - \lambda_1 I$