MA1102-1: Algebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 8

P1. Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y \right\}$. Encuentre bases y dimensiones de U y W. Pruebe que $U \bigoplus W = \mathbb{R}^2$

P2. Considere la función $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_1 - a_3 & a_0 \\ 2a_0 - 2a_1 + a_2 - a_3 & a_0 + a_2 - 3a_3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal

b) Determinar bases y dimensiones de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

P3. Sea V un espacio vectorial de dimension finita $n \in \mathbb{N}$

a) Sea $T : V \to V$ una transformacion lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Demuestre que:

i) $T \circ T = 0$.

ii) n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$.

b) Sea $F : V \to V$ una transformacion lineal tal que $F \circ F = 0$. Demuestre que

i) $\mathrm{Im}(F) \subseteq \mathrm{Ker}(F)$.

ii) Si n es par y el rango de F es $\frac{n}{2}$, entonces $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Ker}(F)$.

P4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz representante de T, es decir, una matriz A tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Encuentre el rango de T.

P5. Considere la función $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(f)(x) = f(x^2)$$

a) Determine si T es una transformación lineal

b) Encuentre la matriz representante para T