MA1102-1: Algebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 1

P1. **a)** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ simétricas. Demuestre que AB es simétrica si y solo si $AB = BA$

b) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3 + 3A^2 = I$

i) Muestre que A es invertible

ii) Obtenga una expresión explicita para A^{-1}

P2. **a)** Pruebe que las matrices cuadradas no conmutan con la multiplicación

b) Sea la matriz de n filas y n columnas triangular superior a coeficientes reales siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $N = C - I$, donde I es la identidad de $n \times n$

i) Demuestre que $N^n = 0$

ii) Concluya que $(\mathcal{M}_{nn}, +, \cdot)$ tiene elementos no invertibles

P3. Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonal, con $d_1, ..., d_n$ distintos y A, B, M y $S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

a) Pruebe que si $MD = DM$, entonces M es diagonal

b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$
Hint: El producto de matrices diagonales conmuta

c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal