Control recuperativo

P1. *a)* Considere las siguientes proposiciones.

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - 1$ es un número primo.

(ii) $\exists n \in \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \setminus \{n\} = \mathbb{Z}$.

*a.*1) (2.5 pts) Determine el valor de verdad de cada una, justificando claramente su respuesta.

> **Solución:**
> - La proposición (i) es F, pues por ejemplo para $n = 3$, se obtiene que $3^2 - 1 = 8$, que no es un número primo. Es decir, $n = 3$ es un contraejemplo para (i). **(1.2 ptos)**
> - La proposición (ii) también es F. En efecto, cualquiera sea $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $n \in \mathbb{Z}$ pero $n \notin \mathbb{Z} \setminus \{n\}$. Es decir los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ no pueden ser iguales. **(1.3 ptos)**

*a.*2) (1.5 pts) Niegue las proposiciones anteriores.

> **Solución:** Usando las reglas de negación de cuantificadores, obtenemos que la negación de (i) es
>
> $$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 - 1 \text{ no es un número primo}$$
>
> **(0.7 ptos)**
>
> y la negación de (ii) es
>
> $$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \setminus \{n\} \neq \mathbb{Z}.$$
>
> **(0.8 ptos)**

b) (2.0 ptos) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x, y) = (2x - y, -x + y)$. Demuestre que f es biyectiva y determine su inversa.

> **Solución:** Mostremos que la función es inyectiva y epiyectiva.
>
> <u>Inyectividad.</u>
>
> Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) en $\mathbb{R}^2$ tales que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ **(0.2 ptos)**. Mostremos que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. La condición $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ se traduce en $(2x_1 - y_1, -x_1 + y_1) = (2x_2 - y_2, -x_2 + y_2)$ **(0.2 ptos)**. Igualando coordenadas obtenemos las ecuaciones
>
> $$\begin{aligned} 2x_1 - y_1 &= 2x_2 - y_2 \\ -x_1 + y_1 &= -x_2 + y_2. \end{aligned}$$
>
> **(0.2 ptos)**
>
> Sumando ambas igualdades obtenenos $x_1 = x_2$. Reemplazando esta igualdad en cualquiera de las ecuaciones anteriores deducimos que $y_1 = y_2$. Concluimos que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Por lo tanto f es inyectiva. **(0.2 ptos)**
>
> <u>Epiyectividad.</u>
>
> Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Deseamos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (a, b)$ **(0.2 ptos)**. Esto es, buscamos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $2x - y = a$ y $-x + y = b$. Observamos que sí podemos resolver este sistema de ecuaciones, con $x = a + b$, $y = a + 2b$. Es directo verificar que $f(a + b, a + 2b) = (a, b)$. Esto muestra que f es epiyectiva. **(0.5 ptos)**
>
> Como f es inyectiva y epiyectiva, tenemos que f es biyectiva. Su inversa (que existe al ser f biyectiva), la podemos deducir del cálculo que hicimos para probar la epiyectividad. Es decir, de la expresión

$f(a+b, a+2b) = (a,b)$, podemos deducir que la función inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, está dada por $f^{-1}(a,b) = (a+b, a+2b)$. **(0.5 ptos)**

P2. Sean $A, B \neq \emptyset$, $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A y $\mathcal{S}$ una relación de equivalencia en B.

a) (3.0 ptos) Demuestre que la relación $\mathcal{T}$ definida en $A \times B$ mediante:

$$(a,b)\mathcal{T}(x,y) \iff a\mathcal{R}x \wedge b\mathcal{S}y,$$

es de equivalencia.

Solución:
Tenemos que verificar que $\mathcal{T}$ tiene las tres propiedades requeridas para ser relación de equivalencia.

- **(1 pto)** $\mathcal{T}$ es refleja: En efecto, sea $(x,y) \in A \times B$ un elemento cualquiera. Así, $x \in A$ y $y \in B$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia en A y B respectivamente, son reflejas, y por tanto, $x\mathcal{R}x$ e $y\mathcal{S}y$. Luego, por definición de la relación $\mathcal{T}$ en $A \times B$, se tiene que $(x,y)\mathcal{T}(x,y)$.
- **(1 pto)** $\mathcal{T}$ es simétrica: En efecto, sean $(a,b), (x,y) \in A \times B$ elementos cualquiera tales que $(a,b)\mathcal{T}(x,y)$. Entonces $a, x \in A$, $b, y \in B$, y por definición de $\mathcal{T}$, $a\mathcal{R}x$ y $b\mathcal{S}y$. Pero como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia, son simétricas, y por tanto, $x\mathcal{R}a$ e $y\mathcal{S}b$, lo que, dada la definición de $\mathcal{T}$, se traduce en que $(x,y)\mathcal{T}(a,b)$.
- **(1 pto)** $\mathcal{T}$ es transitiva: En efecto, sean (a,b), (x,y), $(u,v) \in A \times B$ elementos cualquiera tales que $(a,b)\mathcal{T}(x,y)$ y $(x,y)\mathcal{T}(u,v)$. Entonces $a, x, u \in A$, $b, y, v \in B$, $a\mathcal{R}x$, $b\mathcal{S}y$, $x\mathcal{R}u$ e $y\mathcal{S}v$. Pero como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de equivalencia, son transitivas, y por tanto, $a\mathcal{R}u$ y $b\mathcal{S}v$, lo que, dada la definición de $\mathcal{T}$, se traduce en que $(a,b)\mathcal{T}(u,v)$.

b) (3.0 ptos) Sean $a \in A$ y $b \in B$. Anotemos por:

$[a]_{\mathcal{R}}$ la clase de equivalencia de a respecto a la relación $\mathcal{R}$,
$[b]_{\mathcal{S}}$ la clase de equivalencia de b respecto a la relación $\mathcal{S}$, y
$[(a,b)]_{\mathcal{T}}$ la clase de equivalencia de (a,b) respecto a la relación $\mathcal{T}$.

Demuestre que:

$$[(a,b)]_{\mathcal{T}} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{S}}.$$

Solución:
La proposición que se pide demostrar es una igualdad de conjuntos. La probaremos por definición. Para ello primero notemos que los elementos de ambos lados de la igualdad son pares ordenados.
Sea entonces $(x,y) \in A \times B$ cualquiera. Entonces:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in [(a,b)]_{\mathcal{T}} &\iff (a,b)\mathcal{T}(x,y) && \text{(por definición de clase de equivalencia – \textbf{0.7 ptos})}\\
&\iff a\mathcal{R}x \wedge b\mathcal{S}y && \text{(por definición de } \mathcal{T} \text{ – \textbf{0.7 ptos})}\\
&\iff x \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge y \in [b]_{\mathcal{S}} && \text{(por definición de clases de equivalencia – \textbf{0.7 ptos})}\\
&\iff (x,y) \in [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{S}}. && \text{(por definición de producto cartesiano – \textbf{0.7 ptos})}
\end{aligned}$$

Luego $(x,y) \in [(a,b)]_{\mathcal{T}} \iff (x,y) \in [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{S}}$ y por definición de igualdad de conjuntos se tiene lo pedido **(0.2 ptos)**.

Duración: 1 hora y 30 minutos.