II) Coeficientes binomiales

Combinatoria: área de la matemática cuyo objetivo es "contar".

Esto es útil (por ejemplo) para calcular probabilidades.

Tenemos que si A, B son finitos con $|A| = k$ y $|B| = n$, entonces $|B^A| = n^k$.

$B^A = \{f : A \to B \mid f \text{ función}\}$

¿Cómo se calcula esto? Enumeremos A como $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Luego una función $f : A \to B$ es asignarle un elemento de B a cada a_i con $i \in [1..k] = \{1, \dots, k\}$. O sea para especificar una función necesitamos especificar una k-tupla $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k))$

Especificar una k-tupla de $B^k = \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{k \text{ veces}}$

es especificar k elementos de B. Si hacemos esto tenemos especificadas las imágenes de cada a_i y por lo tanto, tenemos especificada una función. En conclusión:

$$|B^A| = |B^k| = |\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{k \text{ veces}}|$$

(Esta idea nos entrega una función biyectiva $\varphi : B^A \to B^k$ dada por $\varphi(f) = (f(a_1), \dots, f(a_k))$
Como φ es biyectiva, $|B^A| = |B^k|$)

¿Cuál es el cardinal de B^k? Esto es hacer k elecciones de elementos de B. ¿Cuántas posibilidades tengo en cada elección?

$$(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

n posibilidades

n posibilidades

n posibilidades

Así, $|B^k| = n^k$

Ej: $\{a,b,c\}^2$ tiene cardinal $3^2=9$ porque

	a	b	c
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)

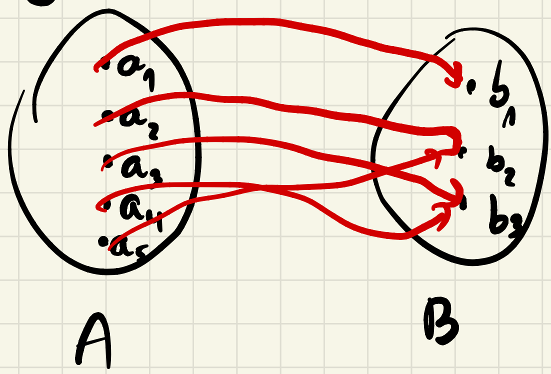
En general, $|C \times D| = |C| \cdot |D|$ si C, D son finitos.

En resumen: $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$.

¿Qué pasa si queremos que la función sea inyectiva? Es decir, contemos los elementos de $\mathcal{F} = \{f : A \to B \mid f \text{ función inyectiva}\}$.

•) Si $|A| > |B|$ (o sea $k > n$) tenemos que $|\mathcal{F}| = 0$ porque ninguna función puede ser inyectiva

Ej: $k=5$, $n=3$

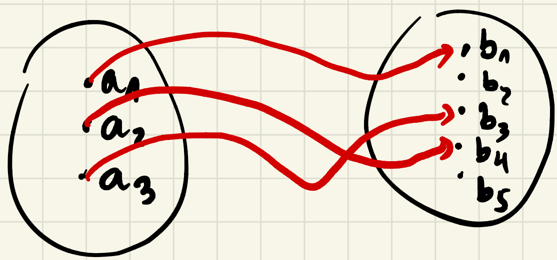


Ninguna función puede ser inyectiva.

Dicho de otra forma, si $k>n$, $\mathcal{F}=\emptyset$.

•) Si $k \leq n$, repetimos el proceso anterior pero ahora nos preocupamos de que no haya repeticiones.

Ej:



Una función inyectiva es especificar una k-tupla en la que no se repitan elementos en coordenadas distintas

Contemos: hay n posibilidades para $f(a_1)$, pero hay $n-1$ posibilidades para $f(a_2)$, $n-2$ posibilidades para $f(a_3)$, ...

Por lo tanto,

$$|\mathcal{F}| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Esto se puede escribir con factoriales:

Recuerdo: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots$

Tenemos que $|\mathcal{F}| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ porque

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdots \cancel{(n-k)} \cdot (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdots n}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdots \cancel{(n-k)}}$$

$$= (n-k+1)(n-k+2) \cdots n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

En particular, si $n=k$, función inyectiva $\Rightarrow$ función biyectiva y así hay $\dfrac{n!}{(n-n)!}$ funciones biyectivas. Simplificando: $n!$ funciones biyectivas.

En resumen:

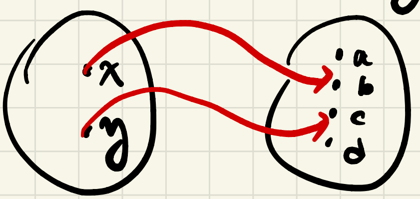
Prop: Para A, B con $|A| = k$, $|B| = m$, los siguientes números coinciden $(k \leq m)$

•) $\dfrac{m!}{(m-k)!}$

•) La cantidad de funciones inyectivas de A en B

•) El número de k-tuplas en B^k con todas sus cordenadas distintas (sin repeticiones).

Ej: Si $A = \{x, y\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ contemos las funciones inyectivas $f: A \to B$



una función inyectiva

$f_1(x) = a$
$f_1(y) = b$ $\rightsquigarrow (a, b)$

$f_2(x) = a$
$f_2(y) = c$ $\rightsquigarrow (a, c)$

Como 2-tuplas ($k=2$) las podemos ver como

$$\left.\begin{matrix} (a,b), & (a,c), & (a,d) \\ (b,a), & (b,c), & (b,d) \\ (c,a), & (c,b), & (c,d) \\ (d,a), & (d,b), & (d,c) \end{matrix}\right\} \text{ 12 2-tuplas distintas}$$

$$12 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 4}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}} = 3\cdot 4 = 12.$$

Ahora vamos a contar los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n.

<u>Coeficiente binomial</u>: Para dos enteros n, k con $n \geq 0$, se define $\binom{n}{k}$ como el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n.

Ej: $\binom{4}{2}$ ¿Cuántos subconjuntos de tamaño 2 hay en $\{1,2,3,4\}$?: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

$\cancel{\{4,1\}}$, $\cancel{\{3,2\}}$, $\cancel{\{4,3\}}$

•) Si $k<0$, entonces $\binom{n}{k}=0$ porque no hay conjuntos de cardinal negativo. Similarmente si $k>n$, $\binom{n}{k}=0$ porque ningún subconjunto de un conjunto de tamaño n puede tener estrictamente más que n elementos.

<u>Nota:</u> "$\binom{n}{k}$" se lee "n sobre k"

<u>Prop:</u> Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

"Dem": Ya tenemos que la cantidad de k-tuplas sin repetición de un conjunto de tamaño n es $\frac{n!}{(n-k)!}$. Si queremos "olvidar el orden" tenemos que ver cuántas veces contamos de manera repetida: por ejemplo, $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$ son 3-tuplas distintas, pero $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$. Debemos dividir por la cantidad de veces que contamos cada conjunto de tamaño k de manera repetida.

Por ejemplo, como 3-tupla contamos a $\{1,2,3\}$ como $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$

Contamos cada conjunto de tamaño k un total de $k!$ veces si los contamos como k-tuplas. Esto se justifica porque cuando "importa el orden" tenemos k posibilidades para el primer elemento de la k-tupla, $(k-1)$ posibilidades para el segundo, ..., 1 posibilidad para el k-ésimo. Así,

$k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 1 = k!$ es la cantidad de veces que contamos repetidamente el mismo conjunto de tamaño k cuando contamos como k-tuplas.

Por lo tanto, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Prop: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) Identidad de Pascal: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$.

Idea de 1): Contar los subcojuntos de tamaño k es lo mismo que contar los subcojuntos de tamaño $n-k$ porque "tomar complemento" pasa de un caso a otro.

La identidad de Pascal permite construir el triángulo de Pascal, que es una manera iterativa o algorítmica de calcular $\binom{n}{k}$.

Primero escribimos la identidad como

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

Triángulo de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{1}{1}+\binom{1}{0}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{2}{1}+\binom{2}{0}$	$\binom{2}{2}+\binom{2}{1}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{3}{1}+\binom{3}{0}$	$\binom{3}{2}+\binom{3}{1}$	$\binom{3}{3}+\binom{3}{2}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{4}{1}+\binom{4}{0}$	$\binom{4}{2}+\binom{4}{1}$	$\binom{4}{3}+\binom{4}{2}$	$\binom{4}{4}+\binom{4}{3}$	$\binom{5}{5}$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Binomio de Newton

El binomio de Newton es una fórmula para calcular $(x+y)^n$

Ej: $(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2xy + 1 \cdot y^2$

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1 \cdot y^3$$

$$(x+y)^4 = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6x^2 \cdot y^2 + 4xy^3 + 1 \cdot y^4$$

$$= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

En general,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

¿Cómo se explica esto?

$$\underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ veces}} = ?$$

Si quiero ver el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ necesito preguntarme cuántas veces aparece este término en la expansión

Ej:

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

En general, en la expansión quedan exactamente $\binom{n}{k}$ términos $x^{n-k}y^k$ porque esto es exactamente elegir un conjunto de tamaño $n-k$ en un conjunto de tamaño n.

$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = (x+y)^5$

¿Cuántas veces aparece el término x^3y^2?

Aparece $\binom{5}{3}$ veces porque esto representa elegir 3 veces "la x" en la multiplicación (y 2 veces "la y"). Esto se puede hacer de $\binom{5}{3}$ maneras distintas porque estamos eligiendo 3 veces "la x" entre las 5 elecciones totales que se hacen.

Todo esto justifica la fórmula

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Este es el binomio de Newton.

Ej: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$