MA1101: Introducción al Álgebra
Profesor: Rodolfo Gutiérrez
Auxiliares: Félix Brokering & Vicente Maturana

Guía Inducción

Supongamos que $P(n)$ es una función proposicional que depende de un número natural $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, $P(n)$ puede ser algo como "$10^n + 2$ es divisible por 3" (lo que se anota usualmente como "$3 \mid (10^n + 2)$"). El axioma de inducción establece que demostrar una proposición de la forma "$\forall n \geq n_0, P(n)$", donde $n_0 \in \mathbb{N}$ es algún número natural fijo, es equivalente a demostrar lo siguiente:

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0, P(n) \implies P(n+1)).$$

Esto es, demostrar que la función proposicional $P(n)$ es verdadera para todo n a partir de n_0 es lo mismo que demostrar que:

- **Caso base:** $P(n)$ es verdadera cuando $n = n_0$, es decir, que $P(n_0)$ es verdadera; y
- **Paso inductivo:** cada vez que $P(n)$ es verdadera, para algún $n \geq n_0$, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

Usando la analogía con dominós vista en clases, esto se puede interpretar de la siguiente forma. Supongamos que tenemos una secuencia de dominós numerados, uno tras otro, de manera que el primer dominó está numerado con el número natural $n_0 \in \mathbb{N}$, y todos los dominós que le siguen están numerados de manera ordenada con los números que le siguen a n_0, es decir, con $n_0 + 1$, $n_0 + 2$, etc. Supongamos que $P(n)$ es la proposición "el n-ésimo dominó se cae". Así, la proposición "$\forall n \geq n_0, P(n)$" se puede leer como "todos los dominós, a partir del numerado con n_0, se caen". El principio de inducción entonces dice que demostrar que todos los dominós se caen es equivalente a demostrar que:

- **Caso base:** el primer dominó, es decir, el numerado con $n_0 \in \mathbb{N}$, se cae; y
- **Paso inductivo:** cada vez que un dominó se cae (digamos, el n-ésimo para algún $n \geq n_0$), entonces el siguiente dominó (el $(n+1)$-ésimo) también se cae.

Como el paso inductivo requiere demostrar un "para todo", formalmente esto se hace tomando un número natural $n \geq n_0$ arbitrario y demostrando que la implicancia "$P(n) \implies P(n+1)$" es verdadera. A su vez, demostrar que una implicancia es verdadera consiste en suponer la hipótesis (en este caso, $P(n)$) y demostrar la conclusión (en este caso, $P(n+1)$). Por lo tanto, lo que se debe hacer es suponer que la proposición $P(n)$ es verdadera y usar esta información para concluir que la proposición $P(n+1)$ es verdadera. Al hecho de suponer que $P(n)$ es verdadera se le conoce como *hipótesis inductiva* (abreviada H.I.) Es muy importante identificar correctamente cuál es la H.I. y cómo se está usando para demostrar que $P(n+1)$ es verdadera.

Por otro lado, una variante del principio inducción es el principio de inducción fuerte, que establece que demostrar "$\forall n \geq n_0, P(n)$" es equivalente a demostrar

$$P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0, P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)).$$

Esto es, demostrar que la función proposicional $P(n)$ es verdadera para cada $n \geq n_0$ es lo mismo que demostrar que:

- **Caso base:** $P(n)$ es verdadera cuando $n = n_0$, es decir, que $P(n_0)$ es verdadera; y
- **Paso inductivo:** cada vez que $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$ es verdadera, para algún $n \geq n_0$, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

La diferencia con el principio de inducción "débil" es que en este caso la hipótesis inductiva es la proposición "$P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$", para algún $n \geq n_0$. Es decir, lo que suponemos verdadero para demostrar $P(n+1)$ es más fuerte: como la proposición "$P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$" está unida con $\wedge$, solo es verdadera si cada uno de los términos, $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n-1), P(n)$, es verdadero. Es decir, en el caso de la inducción fuerte la hipótesis inductiva consiste en suponer que cada una de las proposiciones $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n-1), P(n)$ es verdadera y usar esta información para demostrar que $P(n+1)$ también es verdadera.

Con la analogía de los dominós, el principio de inducción fuerte establece que demostrar que todos los dominós a partir del n_0-ésimo se caen es equivalente a demostrar que:

- **Caso base:** el primer dominó, es decir, el numerado con $n_0 \in \mathbb{N}$, se cae; y
- **Paso inductivo:** cada vez que todos los dominós numerados del n_0 al n (es decir, el n_0-ésimo, el (n_0+1)-ésimo, ..., el $(n-1)$-ésimo y el n-ésimo) se caen, donde $n \geq n_0$, entonces el siguiente dominó (el $(n+1)$-ésimo) también se cae.

P1. Demuestre que, para todo $n \geq 0$, el número $3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ es divisible por 7.

Solución: En este caso, $P(n)\colon 7 \mid (3^{2n+5} + 2^{4n+1})$, y queremos probar que "$\forall n \geq 0, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(0)$ es verdadera. Esto es, veamos que $7 \mid (3^{2n+5} + 2^{4n+1})$ para $n = 0$. Tenemos que

$$3^{2n+5} + 2^{4n+1} = 3^{2\cdot 0+5} + 2^{4\cdot 0+1} = 3^5 + 2^1 = 245.$$

Como $245 = 7 \cdot 35$, este número es divisible por 7. Concluimos entonces que $P(0)$ es verdadera.

- **Paso inductivo:** Sea $n \geq 0$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia $P(n) \implies P(n+1)$ es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostramos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, supongamos que $3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ es divisible por 7. ¡Esta será nuestra hipótesis inductiva (H.I.)! Así, por definición de divisibilidad, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2n+5} + 2^{4n+1} = 7k$, lo que es una manera equivalente de expresar la H.I.

Debemos demostrar entonces que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $3^{2(n+1)+5} + 2^{4(n+1)+1}$ es divisible por 7. Para esto, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que $3^{2n+5} + 2^{4n+1} = 7k$. Tenemos que hacer aparecer entonces el número $3^{2n+5} + 2^{4n+1}$ partiendo de $3^{2(n+1)+5} + 2^{4(n+1)+1}$ para poder usar la única igualdad que conocemos. Para esto, no hay ninguna "receta", así que debemos aplicar trucos algebraicos convenientes hasta que funcione. Una manera de hacerlo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+5} + 2^{4(n+1)+1} &= 3^{2n+2+5} + 2^{4n+4+1} && \text{Expandir exponentes} \\
&= 3^{2n+7} + 2^{4n+5} && \text{Simplificar exponentes} \\
&= 3^2 \cdot 3^{2n+5} + 2^4 \cdot 2^{4n+1} && \text{Propiedades de potencias} \\
&= 9 \cdot 3^{2n+5} + 16 \cdot 2^{4n+1} && \text{Expandir potencias} \\
&= 9 \cdot 3^{2n+5} + (9+7) \cdot 2^{4n+1} && 16 = 9+7 \text{ (para poder factorizar)} \\
&= 9(3^{2n+5} + 2^{4n+1}) + 7 \cdot 2^{4n+1} && \text{Factorizar por 9} \\
&= 9(7k) + 7 \cdot 2^{4n+1} && \text{H.I.} \\
&= 7(9k + 2^{4n+1}) && \text{Factorizar por 7.}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $3^{2(n+1)+5} + 2^{4(n+1)+1} = 7k'$ con $k' = 9k + 2^{4n+1}$. Esto muestra que el número $3^{2(n+1)+5} + 2^{4(n+1)+1}$ se puede escribir como "siete por algo", por lo que es divisible por 7. Así, concluimos que $P(n+1)$ es verdadera. $\square$

P2. Demuestre que todo número natural $n \geq 1$ se puede escribir como $2^k \ell$ donde $k \in \mathbb{N}$ y ℓ es impar.

Solución: En este caso, $P(n)$: "existen $k \in \mathbb{N}$, ℓ impar tales que $n = 2^k \ell$", y queremos demostrar la proposición "$\forall n \geq 1, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(1)$ es verdadera. Esto es, veamos que existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $1 = 2^k \ell$. Como queremos probar existencia, basta con mostrar un $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar que funcionen, es decir, un número natural k y un número natural impar ℓ tales que $1 = 2^k \ell$. Podemos tomar $k = 0$ y $\ell = 1$ y así
$$2^k \ell = 2^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1,$$
lo que muestra que $P(1)$ es verdadera, es decir, establece el caso base.
- **Paso inductivo:** Esta vez usaremos el principio de inducción fuerte. Sea $n \geq 0$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia
$$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$$
es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostramos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que la proposición
$$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$$
es verdadera, esto es, supongamos que $P(1)$ es verdadera, que $P(2)$ es verdadera, ..., que $P(n-1)$ es verdadera y que $P(n)$ es verdadera (como los términos están unidos por un y lógico, deben ser todos verdaderos para que la proposición lo sea). Dicho de otra forma, nuestra H.I. será la siguiente: "para todo número natural m entre 1 y n, existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $m = 2^k \ell$" (¡los números k y ℓ dependen de m! Noten que los cuantificadores "existen" están después del "para todo", lo que, en general, sugiere que hay dependencia. Esto no es tan relevante para el ejercicio, pero en general es importante entender el orden de los cuantificadores.)

  Debemos demostrar entonces que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $n + 1 = 2^k \ell$. Dado que queremos que ℓ sea impar, tendremos que $2 \nmid \ell$. Así, 2^k será la potencia de 2 más grande que divide a $n+1$. Esto sugiere separar en dos casos:
  - Si $n+1$ es impar, tenemos inmediatamente que $n+1 = 2^k \ell$ con $k = 0$ y $\ell = n+1$ (con esta elección, $k \in \mathbb{N}$ y ℓ es impar, así que $P(n+1)$ es verdadera).
  - Si $n+1$ es par, debemos extraer la potencia de 2 más grande que lo divide. Por lo tanto, es conveniente dividir $n+1$ por 2: sea $m = \frac{n+1}{2}$. Tenemos que m es un número natural entre 1 y n, ya que es estrictamente menor a $n+1$ (así que debe ser a lo más el antecesor de $n+1$, es decir, n). Por lo tanto, por H.I., existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $m = 2^k \ell$. Reescribiendo:
  $$m = 2^k \ell \iff \frac{n+1}{2} = 2^k \ell \iff n + 1 = 2^{k+1} \ell.$$
  Por lo tanto, logramos escribir $n+1$ como $2^{k+1}\ell$, donde $k+1 \in \mathbb{N}$ y ℓ es impar. Esto termina de demostrar $P(n+1)$. $\square$

Nota: ¿Por qué usamos el principio de inducción fuerte en vez del principio de inducción (débil)? Si hubiésemos usado el principio de inducción (débil), la H.I. sería suponer que $P(n)$ es verdadera, es decir, que existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $n = 2^k \ell$. Esta es la información que tendríamos que usar para demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que existen $k \in \mathbb{N}$ y ℓ impar tales que $n+1 = 2^k \ell$. El problema es que esta información es insuficiente: si tenemos $n = 2^k \ell$ podemos intentar trucos algebraicos para deducir algo sobre $n+1$, pero no vamos a lograr llegar a ninguna parte. Por ejemplo, si nuestra H.I. es que $n = 2^k\ell$ con $k \in \mathbb{N}$, ℓ impar, obtenemos que $n+1 = 2^k\ell + 1$. Pero este "+1" será imposible de eliminar.

Dicho de otra forma, el resultado que queremos demostrar es un caso particular del teorema fundamental de la aritmética, que dice que todo número natural tiene una (única) descomposición en factores primos. En este caso, solo estamos tomando la mayor descomposición usando 2 como factor primo, y esta es la razón por la que escribimos $n = 2^k\ell$ (es decir, k corresponde a la cantidad de veces que 2 aparece en la descomposición prima de n, y ℓ es "lo que sobra", por lo que es impar). ¡Sin embargo, al sumar 1, la descomposición de un número puede variar enormemente! Por ejemplo, si tenemos $n = 7$, podemos escribir $7 = 2^0 \cdot 7$ (o sea, $k = 0$, $\ell = 7$, que es impar). Por otro lado, $7 + 1 = 8 = 2^3 \cdot 1$ (o sea, $k = 3$, $\ell = 1$, que es impar). Vemos que al pasar de 7 a 8 cambió radicalmente la mayor potencia de 2 que divide a estos números, por lo que conocer la descomposición de 7 no ayuda mucho a conocer la de $7 + 1 = 8$. Esta es la verdadera razón por la que el principio de inducción (débil) no funciona: la descomposición no es "controlable" al sumar 1, sino que varía de formas que no podemos manejar. Sin embargo, la descomposición sí es "controlable" al multiplicar por 2: solo aparecerá otro 2 más. El principio de inducción fuerte nos permitió usar entonces como H.I. que conocemos la descomposición de $\frac{n+1}{2}$ (cuando $n+1$ es par), que sí está muy relacionada con la descomposición de $n+1$, ya que basta con aumentar en 1 la potencia de 2 que aparece.

P3. Demuestre que, para todo $n \geq 1$,

$$1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2(n-1)-1)^2(2(n-1)) + (2n-1)^2(2n) = \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3}.$$

Solución: En este caso,

$$P(n)\colon 1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2(n-1)-1)^2(2(n-1)) + (2n-1)^2(2n) = \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3},$$

y queremos demostrar la proposición "$\forall n \geq 1, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(1)$ es verdadera. Esto es, veamos que

$$1^2 \cdot 2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1)}{3}.$$

  Tenemos que

$$1^2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1)}{3},$$

  lo que establece el caso base.

- **Paso inductivo:** Sea $n \geq 1$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia $P(n) \implies P(n+1)$ es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostraremos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, supongamos que

$$1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2(n-1)-1)^2(2(n-1)) + (2n-1)^2(2n) = \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3}.$$

  Esta será nuestra H.I.

  Debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que

$$1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2n-1)^2(2n) + (2(n+1)-1)^2(2(n+1))$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(6(n+1)^2-2(n+1)-1)}{3}.$$

Podemos trabajar un poco esta expresión antes de comenzar:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)((n+1)+1)(6(n+1)^2-2(n+1)-1)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(6(n^2+2n+1)-2n-2-1)}{3} && \text{Expandir} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(6n^2+12n+6-2n-2-1)}{3} && \text{Expandir} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(6n^2+10n+3)}{3} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Ahora, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que

$$1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2(n-1)-1)^2(2(n-1)) + (2n-1)^2(2n) = \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3}.$$

Nuevamente tenemos que usar algunos trucos algebraicos para hacer aparecer la hipótesis inductiva y llegar a lo que queremos:

$$\begin{aligned}
&1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + (2n-1)^2(2n) + (2(n+1)-1)^2(2(n+1)) \\
&= \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3} + (2(n+1)-1)^2(2(n+1)) && \text{H.I.} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3} + 2(2(n+1)-1)^2(n+1) && \text{Reordenar} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3} + 2(2n+1)^2(n+1) && \text{Simplificar} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3} + 2(4n^2+4n+1)(n+1) && \text{Expandir} \\
&= \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3} + (n+1)\cdot 2 \cdot (4n^2+4n+1) && \text{Reordenar} \\
&= \frac{(n+1)(6n^3-2n^2-n)}{3} + (n+1)(8n^2+8n+2) && \text{Expandir} \\
&= \frac{(n+1)(6n^3-2n^2-n) + 3(n+1)(8n^2+8n+2)}{3} && \text{Juntar términos} \\
&= \frac{(n+1)((6n^3-2n^2-n) + 3(8n^2+8n+2))}{3} && \text{Factorizar por } n+1 \\
&= \frac{(n+1)(6n^3-2n^2-n+24n^2+24n+6)}{3} && \text{Expandir} \\
&= \frac{(n+1)(6n^3+22n^2+23n+6)}{3} && \text{Simplificar} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(6n^2+10n+3)}{3} && \text{Factorizar.}
\end{aligned}$$

Vemos que esta expresión es igual a la que ya teníamos antes. Por lo tanto, mostramos exactamente que $P(n+1)$ es verdadera.

P4. Demuestre que, para todo $n \geq 5$, se tiene que $3^n > 2^n + 100$.

Solución: En este caso, $P(n)\colon 3^n > 2^n + 100$, y queremos demostrar la proposición "$\forall n \geq 5, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(5)$ es verdadera. Esto es, veamos que $3^5 > 2^5 + 100$. Tenemos que

$$3^5 = 243 > 132 = 32 + 100 = 2^5 + 100,$$

lo que establece el caso base.

- **Paso inductivo:** Sea $n \geq 5$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia $P(n) \implies P(n+1)$ es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostraremos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, supongamos que $3^n > 2^n + 100$. Esta será nuestra H.I.

Debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $3^{n+1} > 2^{n+1} + 100$. Para esto, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que $3^n > 2^n + 100$. Nuevamente tenemos que usar algunos trucos algebraicos para hacer aparecer la hipótesis inductiva y llegar a lo que queremos:

$$\begin{aligned}
3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n && \text{Propiedades de potencias} \\
&> 3(2^n + 100) && \text{H.I.} \\
&> 2(2^n + 100) && 3 > 2 \\
&= 2^{n+1} + 200 && \text{Propiedades de potencias} \\
&> 2^{n+1} + 100 && 200 > 100.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $3^{n+1} > 2^{n+1} + 100$. Esto es exactamente que $P(n+1)$ sea verdadera. $\square$

P5. Demuestre que, para todo $n \geq 4$, se tiene que $n! > 2^n$.

Solución: En este caso, $P(n)\colon n! > 2^n$, y queremos demostrar la proposición "$\forall n \geq 4, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(4)$ es verdadera. Esto es, veamos que $4! > 2^4$. Tenemos que

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4,$$

lo que establece el caso base.

- **Paso inductivo:** Sea $n \geq 4$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia $P(n) \implies P(n+1)$ es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostraremos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, supongamos que $n! > 2^n$. Esta será nuestra H.I.

Debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $(n+1)! > 2^{n+1}$. Para esto, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que $n! > 2^n$. Nuevamente tenemos que usar algunos trucos algebraicos para hacer aparecer la hipótesis inductiva y llegar a lo que queremos. Sin embargo, ahora la diferencia es que también debemos usar la definición del factorial, que se define por recurrencia:

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1) \cdot n! && \text{Definición del factorial} \\
&> (n+1) \cdot 2^n && \text{H.I.} \\
&> 2 \cdot 2^n && (n+1) > 2 \text{ porque } n \geq 4 \\
&= 2^{n+1} && \text{Propiedades de potencias.}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(n+1)! > 2^{n+1}$. Esto es exactamente que $P(n+1)$ sea verdadera. $\square$

P6. Demuestre que, para todo $n \geq 0$ se tiene que $\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ es un número natural y es múltiplo de 4, donde a_n está definida por recurrencia mediante $a_0 = 6$ y la regla inductiva $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ para todo $n \geq 1$.

Solución: En este caso, $P(n)\colon (\sqrt{2(a_n^2-4)} \in \mathbb{N}) \wedge (4 \mid \sqrt{2(a_n^2-4)})$, y queremos demostrar la proposición "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(0)$ es verdadera. Esto es, veamos que $\sqrt{2(a_0^2 - 4)}$ es un número natural y que es divisible por 4.

$$\sqrt{2(a_0^2-4)} = \sqrt{2(6^2-4)} = \sqrt{2(36-4)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8,$$

lo que establece el caso base porque 8 es un número natural y es múltiplo de 4.

- **Paso inductivo:** Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia $P(n) \implies P(n+1)$ es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostraremos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, supongamos que $\sqrt{2(a_n^2-4)}$ es un número natural y es múltiplo de 4. Podemos expresar la H.I. de manera equivalente como que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{2(a_n^2-4)} = 4k$. Esta será nuestra H.I.

Debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $\sqrt{2(a_{n+1}^2-4)}$ es un número natural y que es múltiplo de 4. Para esto, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que $\sqrt{2(a_n^2-4)}$ es un número natural y es múltiplo de 4. Nuevamente tenemos que usar algunos trucos algebraicos para hacer aparecer la hipótesis inductiva además de la definición inductiva de a_{n+1} y llegar a lo que queremos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(a_{n+1}^2-4)} &= \sqrt{2((a_n^2-2)^2-4)} && a_{n+1} = a_n^2 - 2 \\
&= \sqrt{2(a_n^4 - 4a_n^2 + 4 - 4)} && \text{Expandir} \\
&= \sqrt{2(a_n^4 - 4a_n^2)} && \text{Simplificar} \\
&= \sqrt{2(a_n^2(a_n^2-4))} && \text{Factorizar por } a_n^2 \\
&= \sqrt{a_n^2}\sqrt{2(a_n^2-4)} && \text{Propiedades de raíces} \\
&= |a_n|\sqrt{2(a_n^2-4)} && \text{Propiedades de raíces y potencias} \\
&= |a_n|(4k) && \text{H.I.} \\
&= 4(|a_n|k) && \text{Reordenar}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\sqrt{2(a_{n+1}^2-4)} = 4k'$, donde k' es un número natural definido por $k' = |a_n|k$. Esto muestra que el número $\sqrt{2(a_{n+1}^2-4)}$ se puede escribir como "cuatro por algo", por lo que es un múltiplo de 4. Además, se puede expresar como una multiplicación de números naturales, por lo que es un número natural. Así, concluimos que $P(n+1)$ es verdadera.

P7. Demuestre que, para todo $n \geq 1$, se tiene que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci (definido mediante la recurrencia $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.)

Solución: En este caso, $P(n)\colon F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, y queremos demostrar que "$\forall n \geq 1, P(n)$".

- **Caso base:** Veamos que $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderos. Esto es, veamos que $F_2F_0 - F_1^2 = (-1)^1$ y que $F_3F_1 - F_2^2 = (-1)^2$. Tenemos que

$$F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1.$$

Por otro lado, tenemos que

$$F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 2 - 1 = 1 = (-1)^2,$$

lo que establece el caso base.

- **Paso inductivo:** Usaremos el principio de inducción fuerte. Sea $n \geq 2$ arbitrario. Debemos mostrar que la implicancia

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$$

es verdadera. Para mostrar una implicancia, suponemos la hipótesis y demostraremos que se tiene la conclusión. Así, supongamos que la proposición

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$$

es verdadera, es decir, supongamos que cada una de las proposiones $P(1), P(2), \ldots, P(n-1), P(n)$ son verdaderas. En otras palabras, tenemos que $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ para todo número natural m entre 1 y n. Esta será nuestra H.I.

Debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Para esto, debemos usar nuestra H.I., o sea, debemos usar que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Nuevamente tenemos que usar algunos trucos algebraicos para hacer aparecer la hipótesis inductiva y llegar a lo que queremos. Además, debemos usar la definición recursiva de los números de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)(F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&\quad - (F_n + F_{n-1})^2 && F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \\
&= F_{n+1}F_{n-1} + F_{n+1}F_{n-2} + F_nF_{n-1} + F_nF_{n-2} \\
&\quad - (F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2) && \text{Expandir} \\
&= (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) + (F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \\
&\quad + F_{n+1}F_{n-2} + F_nF_{n-1} - 2F_nF_{n-1} && \text{Reordenar términos} \\
&= (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) + (F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2) \\
&\quad + F_{n+1}F_{n-2} - F_nF_{n-1} && \text{Simplificar} \\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} + F_{n+1}F_{n-2} - F_nF_{n-1} && \text{H.I.} \\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} \\
&\quad + (F_n + F_{n-1})F_{n-2} - (F_{n-1} + F_{n-2})F_{n-1} && F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} \\
&\quad + F_nF_{n-2} + F_{n-1}F_{n-2} - (F_{n-1}^2 + F_{n-2}F_{n-1}) && \text{Expandir} \\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} \\
&\quad + F_nF_{n-2} - F_{n-1}^2 && \text{Simplificar} \\
&= (-1)^n + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} && \text{H.I.} \\
&= (-1)(-1)(-1)^n + (-1)(-1)(-1)^{n-1} \\
&\quad + (-1)(-1)(-1)^{n-1} && \text{Multiplicar por } (-1)(-1) = 1 \\
&= -(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} && \text{Propiedades de potencias} \\
&= (-1)^{n+1} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Esto es exactamente que la proposición $P(n+1)$ sea verdadera. $\square$

Nota: ¿Por qué probamos dos casos bases, esto es, demostramos que $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas? Esto es necesario porque en el paso inductivo usamos *dos* casos anteriores (con el principio de inducción fuerte). En otras palabras, imaginemos que estamos en el caso inductivo y que tenemos $n = 1$, es decir, suponemos que $P(1)$ y queremos demostrar $P(2)$ (este caso se parece al principio de inducción (débil) porque no hay más casos anteriores, pero siempre estamos usando el principio de inducción fuerte). La primera línea de la demostración que hicimos en el paso inductivo diría que

$$F_3F_1 - F_2^2 = (F_2 + F_1)(F_0 + F_{-1}) - (F_1 + F_0)^2.$$

¡Esto ya tiene un error porque no existe F_{-1}! Así, se ve que la demostración que hicimos en el paso de inductivo *no* funciona para mostrar que la implicancia $P(1) \implies P(2)$ es verdadera. Por lo tanto, debemos mostrar que $P(2)$ es verdadero por separado.

Por el contrario, si $n = 2$, la demostración que hicimos del paso inductivo sí funciona: demostramos que la implicancia $P(1) \wedge P(2) \implies P(3)$ es verdadera. En efecto, para comprobar esto basta reemplazar $n = 2$ en esos pasos y fijarse que nunca aparece un F_{-1} (porque el caso anterior de los números de Fibonacci más pequeño que aparece es el F_{n-2} y tenemos $n = 2$, lo que resulta ser F_0).

Otra forma de ver esto es que la implicancia que realmente demostramos es $P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$ para todo $n \geq 2$. Esta implicancia implica la implicancia

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \wedge P(n) \implies P(n+1)$$

por relajación, así que es suficiente para demostrar la propiedad con el principio de inducción fuerte. Por otro lado, como el primer caso del que tenemos información es $P(1)$ (que es el más pequeño que aparece en el caso base), $n - 1$ debe ser al menos 1 en el caso inductivo, lo que muestra que n debe ser al menos 2. Así, es necesario demostrar $P(2)$ por separado.

P8. [Propuesto] Demuestre que, para todo $n \geq 0$, el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13.

P9. [Propuesto] Demuestre que, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

P10. [Propuesto] Demuestre que, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

P11. [Propuesto] Demuestre que, para todo par de números naturales $n, m \geq 1$, se tiene que

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1},$$

donde F_n es el n-ésimo número de Fibonacci.

Indicación: Deje fijo n y use el principio de inducción sobre m.