Control 6

P1. a) Considere el subconjunto H de los números complejos definido por $H = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Denotamos por $+$ la suma de números complejos y por $\cdot$ el producto de números complejos. Se sabe (no lo demuestre) que $(H, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, donde el neutro para $+$ corresponde a $0 \in \mathbb{C}$ y el neutro para $\cdot$ corresponde a $1 \in \mathbb{C}$.

i) (1 pto.) Demuestre que $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero.

Solución: Supongamos que $(H, +, \cdot)$ tiene divisores de cero. Entonces, existen $z, w \in H$ tales que $z, w \neq 0$ y $z \cdot w = 0$ **(0,3 pts.)**. Como $H \subseteq \mathbb{C}$, z y w pertenecen a $\mathbb{C}$, y como las operaciones de H son exactamente la suma y el producto complejos, deducimos que z y w son divisores de cero en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **(0,2 pts.)**, pero $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo y por lo tanto no tiene divisores de cero, lo cual es una contradicción. Concluimos que tales z y w no pueden existir, y por lo tanto $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero **(0,5 pts.)**.

ii) (2 pts.) Demuestre que los únicos elementos invertibles de $(H, \cdot)$ son 1, -1, i y $-i$.

Solución: En primer lugar, notemos que 1, -1, i y $-i$ son invertibles para el producto: el inverso de 1 es 1, el inverso de -1 es -1, y finalmente i y $-i$ son inversos el uno del otro **(0,5 pts.)**
Para mostrar que estos cuatro son los únicos elementos invertibles, podemos proceder de alguna de las dos formas siguientes.

Primera forma (usando la fórmula para el inverso en $\mathbb{C}$):
Supongamos que $z = a + bi \in H$ es invertible. Esto quiere decir que existe $w = c + di \in H$ tal que $z \cdot w = 1$. Esto de inmediato fuerza a que $z, w \neq 0$. Como $H \subseteq \mathbb{C}$, tal w será inverso de z en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, y como $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo, entonces z tiene un único inverso, cuya forma ya conocemos:

$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \quad \textbf{(0,5 pts.)}$$

Si queremos que w adicionalmente pertenezca a H, en particular se debe cumplir que $\frac{a}{a^2+b^2}$ pertenezca a $\mathbb{Z}$ **(0,2 pts.)**, lo cual sólo es posible si, o bien $a = 0$, o bien $a \in \{1, -1\}$ y $b = 0$ **(0,4 pts.)**

- Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y obtenemos que $z = ib$ y $w = i\frac{-1}{b}$, y puesto que $w \in H$, $\frac{-1}{b} \in \mathbb{Z}$, esto fuerza a que $b \in \{1, -1\}$. En este caso, o bien $z = i$ y $w = -i$, o bien $z = -i$ y $w = i$ **(0,2 pts.)**
- Si $a \in \{1, -1\}$ y $b = 0$, obtenemos que, o bien $z = w = 1$, o bien $z = w = -1$ **(0,2 pts.)**

En cualquier caso notamos que las únicas posibilidades para z son $1, -1, i$ y $-i$.

Segunda forma (usando definición de inverso):
Supongamos que $z = a + bi \in H$ es invertible. Esto quiere decir que existe $w = c + di \in H$ tal que $z \cdot w = 1$. Desarrollando la ecuación, obtenemos que $ac - bd = 1$ y $ad + bc = 0$ **(0,3 pts.)**
Vamos a dividir todas las situaciones posibles en cuatro casos para c y d: $c = d = 0$, $c = 0 \wedge d \neq 0$, $c \neq 0 \wedge d = 0$ y $c, d \neq 0$.

Caso 1: $c = d = 0$. En este caso, obtenemos que $0 = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, este caso no puede darse **(0,3 pts.)**
Caso 2: $c = 0 \wedge d \neq 0$. En este caso, obtenemos que $ad = 0$ y como $d \neq 0$, necesariamente $a = 0$. Reemplazando en la primera ecuación, obtenemos que $bd = -1$, y como $b, d \in \mathbb{Z}$, sólo tenemos dos opciones: $b = 1, d = -1$ o bien $b = -1, d = 1$. En la primera opción $z = i$ y $w = -i$, en la segunda opción $z = -i$ y $w = i$ **(0,3 pts.)**
Caso 3: $c \neq 0 \wedge d = 0$. En este caso, obtenemos que $bc = 0$ y como $c \neq 0$, necesariamente $b = 0$. Reemplazando en la primera ecuación, obtenemos que $ac = 1$, y como $a, c \in \mathbb{Z}$, sólo tenemos dos opciones: $a = c = 1$ o bien $a = c = -1$. En la primera opción $z = w = 1$ y en la segunda opción $z = w = -1$ **(0,3 pts.)**
Caso 4: $c, d \neq 0$. En este caso, podemos despejar a en ambas ecuaciones para obtener que

$$\frac{1 + bd}{c} = \frac{-bc}{d}.$$

lo que conduce a la siguiente ecuación cuadrática en d,

$$bd^2 + d + bc^2 = 0.$$

Si $b = 0$, esta ecuación nos conduce a que $d = 0$, lo que es una contradicción. Si $b \neq 0$, las soluciones de esta ecuación son

$$d = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4b^2c^2}}{2b} \quad \text{y } d = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4b^2c^2}}{2b},$$

pero d es un entero, en particular un real, por lo tanto necesariamente el argumento de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero, es decir,

$$4b^2c^2 \leq 1.$$

Como $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, esta desigualdad nunca se tendrá. Concluimos que el caso $c, d \neq 0$ nunca se puede dar **(0,3 pts.)**

Habiendo analizado los cuatro casos, concluimos que las únicas posibilidades para z son $1, -1, i$ y $-i$.

b) Las siguientes dos tablas incompletas definen parcialmente las dos operaciones del cuerpo $(F, +, \cdot)$, donde $F = \{e, u, a, b\}$.

$+$	e	u	a	b
e	e	u	a	b
u	u	e		a
a	a			u
b	b			

$\cdot$	e	u	a	b
e				
u		u		
a			b	u
b				a

i) (1 pto.) Considerando la información entregada por las tablas, demuestre que e debe ser el neutro para $+$ y que u debe ser el neutro para $\cdot$.

Solución: De la primera fila y la primera columna de la tabla, deducimos que e es el neutro para $+$, puesto que $\forall x \in F$, $x + e = e + x = x$ **(0,2 pts.)**
Ahora notemos que el neutro para $\cdot$ debe ser u. En efecto,

- e no puede ser el neutro para $\cdot$ ya que es el neutro para $+$, y ambos neutros deben ser distintos en un cuerpo **(0,2 pts.)**
- a no puede ser el neutro para $\cdot$ porque $a \cdot a = b \neq a$ **(0,2 pts.)**
- b no puede ser el neutro para $\cdot$ porque $b \cdot b = a \neq b$ **(0,2 pts.)**

La única opción posible entonces es que el neutro para $\cdot$ sea u **(0,2 pts.)** .

ii) (2 pts.) Considerando las propiedades que debe cumplir un cuerpo, complete las tablas de ambas operaciones. Justifique detalladamente su respuesta.

Solución: Analicemos primero la tabla de $+$.
Como $(F, +)$ es un grupo, cada elemento debe tener inverso para $+$ y este es único. En particular, como b debe tener inverso para $+$, en la cuarta columna de la tabla debe haber un e, y la única posición posible para esto es la posición $(4, 4)$. Esto fuerza a que la entrada $(4, 4)$ de la tabla sea e **(0,3 pts.)**
Como $(F, +)$ es un grupo abeliano, necesariamente debe cumplirse que $b+u = u+b$ y $b+a = a+b$, lo que obliga a que las entradas $(4, 2)$ y $(4, 3)$ de la tabla sean a y u respectivamente **(0,3 pts.)**
Ahora falta ver cuánto es $u + a = a + u$ y $a + a$. Para ver cuánto vale $u + a = a + u$ notemos que, como $(F, +)$ es un grupo, todo elemento de $(F, +)$ es cancelable. Así,

- Si $u + a = e \implies u + a = u + u \implies a = u$.
- Si $u + a = u \implies a = e$.
- Si $u + a = a \implies u = e$.

Ninguna de las opciones anteriores es posible, por lo tanto necesariamente $u + a = b$. Así, las entradas $(2, 3)$ y $(3, 2)$ de la tabla son b **(0,5 pts.)**
Finalmente, para ver cuánto es $a + a$, notemos que en la tercera columna de la tabla debe haber un e, ya que a debe tener inverso. La única posición posible en la que aún podemos poner e es $(3, 3)$, lo que fuerza a que la entrada $(3, 3)$ de la tabla sea e **(0,2 pts.)**
En resumen, la tabla de $+$ queda como sigue:

$+$	e	u	a	b
e	0	1	a	b
u	u	e	b	a
a	a	b	e	u
b	b	a	u	e

Analicemos ahora la tabla de $\cdot$.
En primer lugar, notemos que tanto la primera fila como la primera columna de la tabla tienen sólo e, ya que en todo anillo se cumple que $x \cdot e = e \cdot x = e$ si e es el neutro de $+$ y x es un elemento del anillo **(0,3 pts.)**
En segundo lugar, como u es neutro para $\cdot$, la segunda fila de la tabla debe ser $\begin{bmatrix} e & u & a & b \end{bmatrix}$ y la segunda columna debe ser $\begin{bmatrix} e \\ u \\ a \\ b \end{bmatrix}$ **(0,2 pts.)**
En tercer lugar, ya que necesitamos que $(F, +, \cdot)$ sea un cuerpo, en particular un anillo conmutativo, necesariamente debe cumplirse que $a \cdot b = b \cdot a$, lo que obliga a que la entrada $(4, 3)$ de la tabla sea

u **(0,2 pts.)**

En resumen, la tabla de $\cdot$ queda como sigue:

$\cdot$	e	u	a	b
e	e	e	e	e
u	e	u	a	b
a	e	a	b	u
b	e	b	u	a

P2. a) (3 pts.) Encuentre todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que cumplen, simultáneamente, que $z^6 = 1$ y que $\bar{z}^2 + z = 0$.

Solución:

Primera forma (Resolviendo la primera ecuación y evaluando en la segunda):

Notemos que la primera ecuación impone que z debe ser una raíz sexta de la unidad **(0,3 pts)**.

Las raíces sextas de la unidad son los elementos del conjunto

$$\{1 = w_0, w_1, \cdots, w_5\},$$

donde $w_k = e^{ik\pi/3}$ para $k \in \{0, \cdots, 5\}$ **(0,5 pts)**. Luego, sólo tenemos seis posibilidades para z. De estas seis posibilidades, vamos a evaluar cuáles satisfacen además la segunda ecuación.

- $\overline{w_0}^2 + w_0 = 1^2 + 1 = 1 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_1}^2 + w_1 = w_5^2 + w_1 = w_4 + w_1 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_2}^2 + w_2 = w_4^2 + w_2 = w_2 + w_2 \neq 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_3}^2 + w_3 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_4}^2 + w_4 = w_2^2 + w_4 = w_4 + w_4 \neq 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_5}^2 + w_5 = w_1^2 + w_5 = w_2 + w_5 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.

Así, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen ambas ecuaciones son $w_1 = e^{i\pi/3}$, $w_3 = -1$ y $w_5 = e^{5\pi/3}$ **(0,4 pts)**.

Segunda forma (Resolviendo la segunda ecuación y evaluando en la primera):

La segunda ecuación impone que z debe cumplir $\overline{z}^2 = -z$ **(0,1 pts)**. Primero observamos que $z = 0$ satisface esta ecuación **(0,2 pts)**. Podemos suponer entonces $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y ver qué otras soluciones existen.

Para encontrar las soluciones no nulas, hay dos formas:

Primera forma para encontrar las soluciones no nulas:

Escribiendo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 = -z &\iff (\overline{re^{i\theta}})^2 = -re^{i\theta} && (z = re^{i\theta} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff (re^{-i\theta})^2 = re^{i\theta}e^{i\pi} && (\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \text{ y } e^{i\pi} = -1 - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff re^{-2i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} && (\text{Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre} - \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

Como $r > 0$, de la última ecuación obtenemos que $r = 1$, por lo que $|z| = 1$ **(0,2 pts)**. Además, obtenemos que $-2\theta + 2k\pi = \theta + \pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ **(0,2 pts)**. Despejando, resulta que

$$\theta = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$ **(0,2 pts)**. Concluimos así que hay tres soluciones más, que se obtienen tomando $k \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones es

$$\{0, e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3}\}.$$

(0,2 pts por encontrar las soluciones no nulas de $\overline{z}^2 + z = 0$ – ya se asignó puntaje por la solución nula).

Segunda forma para encontrar las soluciones no nulas:

Alternativamente, es posible manipular la ecuación para llegar a que, si $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 + z = 0 &\iff \overline{z}^2 = -z && (\text{Álgebra de números complejos} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff 1 = -\frac{z}{\overline{z}^2} && (z \neq 0 \iff \overline{z} \neq 0 - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff 1 = -z\left(\frac{z}{|z|^2}\right)^2 && (z\overline{z} = |z|^2 \implies \tfrac{1}{\overline{z}} = \tfrac{z}{|z|^2} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff z^3 = -|z|^4. && (\text{Álgebra de números complejos} - \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

Tomando módulos, se encuentra que $|z|^3 = |z|^4$, lo que muestra que $|z| = 1$ (porque $z \neq 0$) **(0,1 pts.)**. Por lo tanto, la ecuación queda $z^3 = -1$ **(0,2 pts.)**. Como $-1 = e^{i\pi}$ en forma polar **(0,1 pts.)**, esta ecuación tiene por soluciones a $e^{i(\pi+2k\pi)/3}$ con $k \in \{0, 1, 2\}$ **(0,1 pts.)**, de donde se obtiene que el conjunto de soluciones es

$$\{0, e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3}\}.$$

(0,2 pts por encontrar las soluciones no nulas de $\overline{z}^2 + z = 0$ – ya se asignó puntaje por la solución nula).

Podemos verificar ahora cuáles de esta soluciones satisfacen además la primera ecuación.

- $0^6 = 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $(e^{i\pi/3})^6 = e^{2\pi i} = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $(-1)^6 = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $(e^{5i\pi/3})^6 = e^{10\pi i} = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.

Así, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen ambas ecuaciones son $e^{i\pi/3}$, -1 y $e^{5i\pi/3}$ **(0,4 pts)**.

b) (3 pts.) Calcule la parte real e imaginaria del número complejo

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}}.$$

Comenzamos transformando $1+i$ a forma polar. Se tiene que

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \textbf{(0,3 pts.)}.$$

Además, si se dibuja el número complejo $1+i$ en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+i)) = \frac{1}{1} = 1$ **(0,1 pts.)**, por lo que $\arg(1+i) = \pi/4$. Obtenemos de esta forma que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ **(0,2 pts.)**.
Ahora, transformaremos $1+\sqrt{3}i$ a forma polar. Se tiene que

$$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2. \quad \textbf{(0,3 pts.)}.$$

Además, si se dibuja el número complejo $1+\sqrt{3}i$ en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+\sqrt{3}i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ **(0,1 pts.)**, por lo que $\arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/3$. Obtenemos de esta forma que $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ **(0,2 pts.)**.
Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{100}}{(2e^{i\pi/3})^{50}} && \text{(Reemplazar numerador y denominador por sus formas polares)}\\
&= \frac{(\sqrt{2})^{100}e^{100i\pi/4}}{2^{50}e^{50i\pi/3}} && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – \textbf{(0,2) pts.})}\\
&= \frac{2^{50}e^{25\pi i}}{2^{50}e^{50i\pi/3}} && \text{(Propiedades de potencias y simplificaciones)}\\
&= \frac{e^{25\pi i}}{e^{50i\pi/3}}. && \text{(Simplificar – \textbf{(0,1) pts.})}
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
e^{25\pi i} &= e^{i\pi+24\pi i} && \text{(Separar múltiplos de $2\pi i$ – \textbf{(0,1) pts.})}\\
&= e^{i\pi+12\cdot 2\pi i} && (24 = 12\cdot 2)\\
&= e^{i\pi}e^{12\cdot 2\pi i} && \text{(Propiedades de potencias – \textbf{(0,1) pts.})}\\
&= e^{i\pi}(e^{2\pi i})^{12} && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – \textbf{(0,2) pts.})}\\
&= e^{i\pi}\cdot 1^{12} && (e^{2\pi i} = 1 \text{ – \textbf{(0,1) pts.}})\\
&= e^{i\pi} && (1^{12} = 1)
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
e^{50i\pi/3} &= e^{(2\pi+48\pi)i/3} && \text{(Separar múltiplos de $2\pi i$ – \textbf{(0,1) pts.})}\\
&= e^{2\pi i/3+16\pi i} && \text{(Álgebra de números complejos)}\\
&= e^{2\pi i/3+8\cdot 2\pi i} && (16 = 8\cdot 2)\\
&= e^{2\pi i/3}e^{8\cdot 2\pi i} && \text{(Propiedades de potencias – \textbf{(0,1) pts.})}\\
&= e^{2\pi i/3}(e^{2\pi i})^{8} && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – \textbf{(0,2) pts.})}\\
&= e^{2\pi i/3}1^{8} && (e^{2\pi i} = 1 \text{ – \textbf{(0,1) pts.}})\\
&= e^{2\pi i/3}. && (1^{8} = 1)
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{e^{i\pi}}{e^{2\pi i/3}} && \text{(Reemplazando los resultados anteriores)}\\
&= e^{i(\pi - 2\pi/3)} && \text{(Propiedades de potencias – \textbf{(0,1) pts})}\\
&= e^{i\pi/3} && \text{(}1 - 2/3 = 1/3\text{ – \textbf{(0,1) pts})}\\
&= \cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3) && (e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R} \text{ – \textbf{(0,1) pts})}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i. && (\cos(\pi/3) = 1/2 \text{ y } \mathrm{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \text{ – \textbf{(0,1) pts.})}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = 1/2$ y $\mathbb{I}\mathrm{m}(z) = \sqrt{3}/2$ **(0,1 pts.)**

Duración: 1h 30'.