P1. Lógica

Determine los valores de verdad de las proposiciones p, q, r, s, t sabiendo que la siguiente proposición es falsa:

$$\underbrace{[(p \iff q) \wedge \overline{(r \implies s)} \wedge \bar{t}]}_{(A)} \implies \underbrace{[\bar{s} \wedge (q \implies s)]}_{(B)}$$

Por def. de $\Rightarrow$, (A) es V y (B) es F

Como (A) es V, por def. de $\wedge$, $(p \Leftrightarrow q)$, $\overline{(r \Rightarrow s)}$ y $\bar{t}$ son V.

Como $\bar{t}$ es V, $\boxed{t \text{ es } F}$ (def. negación).

Como $\overline{(r \Rightarrow s)}$ es V

$\Leftrightarrow (\overline{\bar{r} \vee s})$ (caract $\Rightarrow$)

$\Leftrightarrow (r \wedge \bar{s})$ (Doble neg. y Morgan)

$\Rightarrow \boxed{r \text{ es } V}$ y $\boxed{s \text{ es } F}$ (def. $\wedge$).

Como $\bar{s}$ es V, entonces

$(B) \Leftrightarrow [V \wedge (q \Rightarrow F)]$

$\Leftrightarrow (q \Rightarrow F)$ def. $\wedge$

y como (B) es F, q debe ser V. $\boxed{q \text{ es } V}$

Además, como $(p \Leftrightarrow q)$ es V y q es V nec. $\boxed{p \text{ es } V}$

$\therefore$ los valores de V de p, q, r, s, t son V, V, V, F, F, resp. ∎

1. (2.0 ptos.) Demostrar, utilizando los axiomas de los números reales que

$$\forall x, y \in R \quad x, y \neq 0 \quad x^{-1} + y^{-1} = (x+y)(x^{-1}y^{-1})$$

en cada paso diga cual o cuales axiomas o propiedades está utilizando.

Solución: Desarrollaremos el lado derecho utilizando la distributividad

$$(x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) \quad 0.5 \text{ ptos.}$$

Asociando tenemos que $x(x^{-1}y^{-1}) = (xx^{-1})y^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos) lo anterior es igual a y^{-1}.

Del mismo modo asociando y conmutando obtenemos que $y(x^{-1}y^{-1}) = (yy^{-1})x^{-1}$ (0.25 ptos.). Por el axioma de los inversos multiplicativos (0.25 ptos) y el axioma del neutro multiplicativo (0.25 ptos) lo anterior es igual a x^{-1}. Lo que demuestra la igualdad.

racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$

P2. Cuantificadores

¿Es cierto que $\forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}, (\underbrace{x^2 = y}_{x \cdot x = y} \vee x^2 = -y)$? Justifique su respuesta.

La respuesta es no. $\rightarrow$ x es un factor de y

¿Por qué? Pensar en $y=2$.

¿$\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^2 = 2 \vee \underbrace{x^2 = -2}_{\substack{\text{imposible} \\ (x^2 \geq 0)}}$?

No. Pues la ecuación

$x^2 = 2$ tiene solamente dos raíces reales que

son $x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

P5. Sean $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Muestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$.

Solución: Procedemos por inducción fuerte, pues la recurrencia se define a partir de dos momentos anteriores (para calcular el término $n+1$, requiero el término n y $n-1$). Los casos base son $n = 0$ y $n = 1$ (2 casos base porque requeriré como hipótesis inductiva que 2 momentos anteriores a $n+1$, que serían el momento n y $n-1$, satisfagan la desigualdad deseada); en estos casos se tiene que $f_0 = 2 = 1 + 1 = a^0 + b^0 \geq a^0 + b^0$ y $f_1 = 2a = a + a \underbrace{\geq}_{a \geq b} a + b = a^1 + b^1 \geq a^1 + b^1$ por lo tanto satisfacen la expresión deseada. Ahora para el paso inductivo, sea $n > 1$ arbitrario (siempre más grande que el caso base más grande) de tal forma que se cumple lo deseado para $n-1$ y n (hipótesis inductiva, ya no solo considero que n cumple lo que quiero como en inducción débil, sino también $n-1$). Probemos con ello que entonces $n+1$ cumple lo deseado. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= af_n + bf_{n-1} && (18)\\
&\underbrace{\geq}_{H.I.} a(a^n + b^n) + b(a^{n-1} + b^{n-1}) && (19)\\
&= a^{n+1} + \underbrace{a}_{\geq b} b^n + \underbrace{ba^{n-1} + b^n}_{\geq 0} && (20)\\
&\geq a^{n+1} + bb^n + 0 && (21)\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} && (22)
\end{aligned}
$$

y esto prueba lo que queríamos (ojo que en (3) la última expresión es positiva pues por el enunciado a y b eran naturales no nulos, por lo tanto esa operación corresponde a un natural y por lo tanto en particular es positiva). Luego por inducción fuerte se concluye lo pedido..

3. (2.0 ptos.) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1$ (1)

Solución: Las expresiones $x^2 - 2x + 1$ y $x^2 - 3x + 2$ pueden factorizarse como $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ y $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. De modo que las soluciones de la inecuación (1) son las mismas que las de la inecuación

$\left|\frac{(x-1)}{(x-2)}\right| \leq 1$ (2) salvo la solución $x = 1$ (0.5 ptos.)

Esta última inecuación es equivalente a

$-1 \leq \frac{(x-1)}{(x-2)} \leq 1$ (3)

Así x es solución de la inecuación (3) si

(a) $x > 2$ y $-(x-2) \leq x-1 \leq x-2$ o bien

(b) $x < 2$ y $-(x-2) \geq x-1 \geq x-2$.

En el caso (a) no existe x que satisfaga las tres desigualdades pues una de ellas ($-1 \leq -2$) es siempre falsa (0.5 ptos.).

La solución a las inecuaciones del caso (b) es el intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}]$ (0.5 ptos.).

Por lo tanto la solución a la inecuación (3) es el intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}]$. Como todas las soluciones de (3) son soluciones de (1) a excepción de $x = 1$ concluimos que el conjunto solución es $]-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$ (0.5 ptos.).

P7. Sea E un conjunto de referencia no vacío y $A, B, C \subseteq E$ conjuntos cualesquiera. Demuestre que

$$C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \iff (C \cap B \subseteq B \setminus A) \wedge (C \setminus B \subseteq A).$$

Solución: Procedemos por doble implicancia.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Por hipótesis y definición de diferencia de conjuntos:

$$C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Ahora, como quiero probar algo con $C \cap B$, intersectemos a ambos lados la inclusión de arriba por B (recuerden que siempre se puede intersectar o unir a ambos lados por el mismo conjunto, al igual que una igualdad en los reales cuando suman a ambos lados por algo) y utilizando la distributividad de $\cap$ con respecto a $\cup$ se obtiene que:

$$C \cap B \subseteq [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap B = \underbrace{(A \cap B^c \cap B)}_{B^c \cap B = \emptyset} \cup \underbrace{(B \cap A^c \cap B)}_{B \cap B = B} = B \cap A^c = B \setminus A.$$

Por otro lado, si intersecto ahora la inclusión del principio por B^c a ambos lados queda que:

$$C \setminus B = C \cap B^c \subseteq [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cap B^c = \underbrace{(A \cap B^c \cap B^c)}_{B^c \cap B^c = B^c} \cup \underbrace{(B \cap A^c \cap B^c)}_{B \cap B^c = \emptyset} = A \cap B^c \subseteq A.$$

lo que prueba lo deseado.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Por hipótesis y definición de diferencia de conjuntos:

$$\underbrace{C \setminus B}_{= C \cap B^c} \subseteq A \underbrace{\Longrightarrow}_{\cap B^c} \underbrace{C \cap B^c \cap B^c}_{= C \cap B^c = C \setminus B} \subseteq A \cap B^c = A \setminus B.$$

Pero además tenemos por hipótesis que $C \cap B \subseteq B \setminus A$. Luego, utilizando esto y el hecho que $C = (C \cap B) \cup (C \setminus B)$ (fácil de demostrar, lo hicimos en el auxiliar 3, pueden convencerse con un dibujo que es cierto) se obtiene que:

$$C = (C \cap B) \cup (C \setminus B) \subseteq (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$

lo que prueba lo pedido.