P1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos con B acotado superiormente. Suponga que se tiene la siguiente propiedad:

$$\forall a \in A, \exists b \in B, a \leq b$$

Demuestre que $\sup A$ existe y se tiene $\sup A \leq \sup B$

P2. Para cada una de estas condiciones, encuentre ejemplos de sucesiones que las cumplan o bien argumente por qué dicho ejemplo no existe:

(a) Una sucesión acotada que no sea convergente

(b) Una sucesión convergente que no sea acotada

(c) Una sucesión convergente que tome infinitos valores

(d) Una sucesión no convergente que tome finitos valores

P3. Sea $c \in [0, 1]$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_0 = c$ y

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{x_n+1}{2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Encuentre un c tal que x_n sea divergente y pruébelo ¿Existe alguno para el cual la sucesión converja?