Pauta de corrección Control 5

P1. Sea (u_n) la sucesión definida por la siguiente recurrencia: $u_0 = 5, \qquad u_{n+1} = 5 - \frac{6}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

a) **(2 pts)** Demuestre por inducción que (u_n) es acotada inferiormente por 3.

Solución: Hay que demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.

i) (Caso base) PDQ: $u_0 \geq 3$. Esto es cierto ya que $u_0 = 5$ y $5 \geq 3$. 0.5

ii) PDQ: $u_n \geq 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq 3$. 0.5

En efecto: Si $u_n \geq 3$ entonces $\frac{6}{u_n} \leq 2$, de donde $-\frac{6}{u_n} \geq -2$, o sea $u_{n+1} \geq 5 - 2 = 3$. 1.0

b) **(2 pts)** Demuestre que (u_n) es decreciente (puede usar inducción).

Solución: Se puede demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

i) (Caso base) PDQ: $u_0 \geq u_1$. Esto es cierto ya que $u_0 = 5$ y $u_1 = 5 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5} \leq 5$. 0.5

ii) PDQ: $u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2}$. 0.5

En efecto: Si $u_n \geq u_{n+1}$ entonces $\frac{6}{u_n} \leq \frac{6}{u_{n+1}}$, de donde $-\frac{6}{u_n} \geq -\frac{6}{u_{n+1}}$, o sea $u_{n+1} = 5 - \frac{6}{u_n} \geq 5 - \frac{6}{u_{n+1}} = u_{n+2}$. 1.0

También se puede hacer directamente, si se realiza el siguiente cálculo:

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{6}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 5u_n + 6}{u_n} = -\frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{u_n}$$ 1.0

De aquí, usando la parte (a), resulta que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{\overbrace{(u_n - 2)}^{>0}\overbrace{(u_n - 3)}^{\geq 0}}{\underbrace{u_n}_{>0}} \leq 0,$$ 0.5

de donde resulta que (u_n) es decreciente. 0.5

c) **(2 pts)** Explique porque (u_n) es convergente y calcule su límite.

Solución: Como (u_n) es decreciente (o sea monótona) y acotada inferiormente, entonces es convergente. 1.0

Sea $\ell = \lim u_n \geq 3$. tomando límite en la fórmula recursiva se tiene que $\ell = 5 - \frac{6}{\ell}$ de donde despejando queda la cuadrática $\ell^2 - 5\ell + 6 = 0$ cuyas raíces son 2 y 3. 0.5

Como $\ell \geq 3$, de las dos raíces anteriores, solo sirve $\ell = 3$, que debe ser el límite de la sucesión. 0.5

P2. Calcule, si existen, los siguientes límites, indicando en cada caso los límites o teoremas auxiliares que use como apoyo.

a) **(2 pts)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+3^{2n}}$.

Solución: como $1 \leq 3^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$9 = \sqrt[n]{3^{2n}} \leq \sqrt[n]{1+3^{2n}} \leq \sqrt[n]{2\cdot 3^{2n}} = 9\sqrt[n]{2}$$ 1.0

Tomando límite, ambas cotas convergen a 9, por lo tanto, en virtud del teorema del sandwich, se concluye que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+3^{2n}} = 9$. 1.0

b) **(2 pts)** $\lim_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{5n} - \dfrac{n^{100}\cos(n!)}{(1{,}01)^n} \right\}$.

Solución: Para el primer término se tiene que $\sqrt[n]{5n} = \sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n} \to 1\cdot 1 = 1$ (ambos límites conocidos) 1.0

Para el segundo término conviene escribirlo como:

$$\frac{n^{100}\cos(n!)}{(1{,}01)^n} = n^{100}\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n \cos(n!) \to 0,$$

ya que se trata de la sucesión nula conocida $(n^k q^n)$ con $k = 100$ y $0 < q < 1$, que está multiplicada por una sucesión acotada. 1.0

Restando ambos límites resulta $\lim_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{5n} - \dfrac{n^{100}\cos(n!)}{(1{,}01)^n} \right\} = 1$.

c) **(2 pts)** $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Solución: Claramente la sucesión en la base $q_n = 1 - \dfrac{n-1}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$. 0.5

Por lo tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $q_n \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$. 1.0

Con esto se logra el acotamiento:

$$n\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq n\left(1-\frac{n-1}{2n+1}\right)^n \leq n\left(\frac{3}{4}\right)^n, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Usando sandwich de sucesiones, combinado con las conocidas sucesiones nulas (nq^n), con $q = \frac{1}{4}$ y $q = \frac{3}{4}$ respectivamente, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n-1}{2n+1}\right)^n = 0$$

0.5