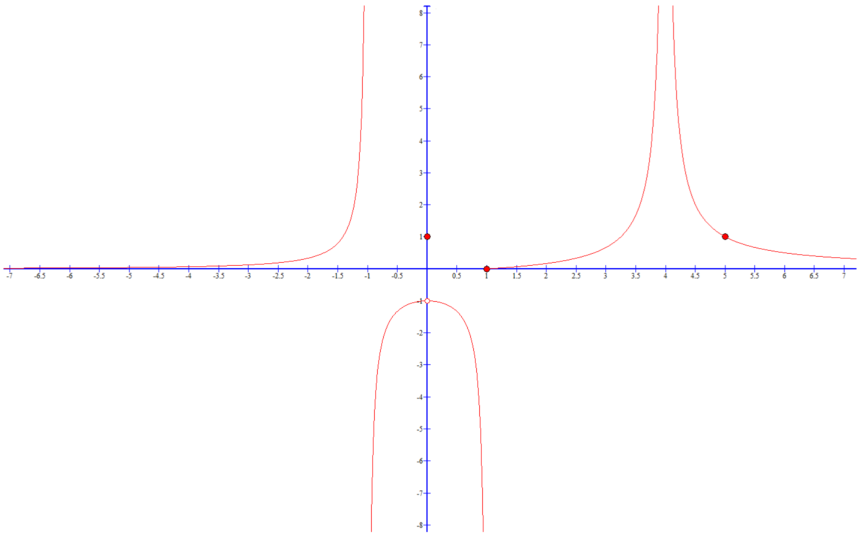
P1. Me tinca por gráfico

Usando el gráfico de la siguiente función $f(x)$



Diga si existen los siguientes límites, y de existir, cuales son:

(a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

SOL: De la inspección del gráfico podemos concluir:

(a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existen, pues ambos divergen.

(c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

P2. Cambia todo cambia

Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(\pi x)}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$

(e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - \dfrac{\pi}{2}) \tan(x)$

SOL:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} \cdot \dfrac{bx}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin(bx)}$

Haciendo el cambio de variable $u = ax$, $v = bx$, cuando $x \to 0 \implies u \to 0$, $v \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b} \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \cdot \lim_{v\to 0} \frac{v}{\sin(v)} = \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx} + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} - b \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx} - 1}{bx}$

Haciendo el cambio de variable $u = ax$, $v = bx$, cuando $x \to 0 \implies u \to 0$, $v \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a \lim_{u\to 0} \frac{e^{u} - 1}{u} - b \lim_{v\to 0} \frac{e^{v} - 1}{v} = a \cdot 1 - b \cdot 1 = a - b$$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x^2} = \pi^2 \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\pi x)}{(\pi x)^2}$

Haciendo el cambio de variable $u = \pi x$, cuando $x \to 0 \implies u \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x^2} = \pi^2 \lim_{u\to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \pi^2 \cdot \frac{1}{2}$$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1} \exp(\ln(x^{-\frac{x}{\ln(x)}})) = \lim_{x\to 1} \exp(-\frac{x}{\ln(x)} \cdot \ln(x)) = \lim_{x\to 1} \exp(-x) = e^{-1}$

(e) Haciendo el cambio de variable $u = x - \frac{\pi}{2}$, cuando $x \to \frac{\pi}{2} \implies u \to 0$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan(x) = \lim_{u\to 0} u \cdot \tan(u + \frac{\pi}{2}) = \lim_{u\to 0} u \cdot \frac{\sin(u + \frac{\pi}{2})}{\cos(u + \frac{\pi}{2})} = \lim_{u\to 0} u \cdot \frac{\sin(u)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(u)\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(u)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{2})}$$

$$= \lim_{u\to 0} u \cdot \frac{\cos(u)}{-\sin(u)} = -\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u)} \cdot \lim_{u\to 0} \cos(u) = -1 \cdot 1 = -1$$

P3. Bajando los limites

Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ es igual a 0.

Con ayuda de lo anterior, calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

SOL: El primer límite lo haremos por definición, es decir, mostraremos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (0, \delta) \implies |x\ln(x)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que, como $x > 0$ y y usando las desigualdades del logaritmo:

$$|x\ln(x)| = x|\ln(x)| \leq x|x - 1|$$

Si elegimos un $\delta_1 = 1$, de tal forma que $x \in (0, 1)$, entonces $|x - 1| < 1$, luego:

$$|x\ln(x)| \leq x|x - 1| < x$$

Por último, si elegimos un $\delta_2 = \varepsilon$, entonces $x \in (0, \delta_2) \implies x < \delta_2 = \varepsilon \implies x < \varepsilon$. Por lo tanto, si tomamos $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon)$ se cumple que:

$$|x \ln(x)| < x < \varepsilon$$

Por lo tanto, hemos encontrado un δ tal que si $x \in (0, \delta) \implies |x \ln(x)| < \varepsilon$.

Utilizando el límite anterior, notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^x &= \lim_{x \to 0^+} \exp(\ln(x^x)) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \exp(x \ln(x)) \\
&= \exp(\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)) \\
&= e^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$