

PI) a) Por inducción:

Aux 13 Calc

CB) ($n=0$)

Veamos que $S_1 < S_0$: $S_1 = \ln(S_0) + 1 = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2 < e = S_0$

$\Rightarrow S_1 < S_0$ //

HI) Sea $n \in \mathbb{N}$ tg ~~$S_{n-1} < S_n$~~ $S_n < S_{n-1}$;

PI) PPQ: ~~$S_{n+1} < S_n$~~ $S_{n+1} < S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \ln(S_n) + 1 - \ln(S_{n-1}) - 1 = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) < \ln(1) = 0$$

$$\therefore S_{n+1} - S_n < 0 \Rightarrow S_{n+1} < S_n$$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente //

b) Por inducción:

CB) ($n=0$) Notemos $S_0 = e \geq 1$ //

HI) Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene $S_n \geq 1$

PI) PPQ: $S_{n+1} \geq 1$

$$\Rightarrow S_{n+1} = \ln(S_n) + 1, \text{ como } S_n \geq 1 \Rightarrow \ln(S_n) \geq \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow S_{n+1} \geq 1 // \therefore S_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Notemos que de la recurrencia:

$$S_{n+1} = \ln(S_n) + 1 \Leftrightarrow S_{n+1} - 1 = \ln(S_n) \quad / \exp(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow e^{S_{n+1} - 1} = S_n$$

$$\text{Luego } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{S_{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$\hookrightarrow$ Como (S_n) es decreciente y acotada inferior, entonces converge, digamos $S_n \rightarrow L$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{S_{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Leftrightarrow e^{L-1} = L$$

P2)

• Notemos que $e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow e^{-n} \sqrt{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además, por la desigualdad exponencial, como $-n < -1 \quad \forall n \geq 1$:

$$\rightarrow e^{-n} \leq \frac{1}{1+n} \Rightarrow e^{-n} \sqrt{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+n} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$\therefore 0 \leq e^{-n} \sqrt{n} \leq \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} 0}_{=0} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sqrt{n} \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}}}_{=0} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sqrt{n} = 0$$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n} \sqrt{n})^2 = 0$, pues es simplemente la sucesión anterior al cuadrado //

↳ Ahora, usemos estos límites para los 2 sgtes:

• Notemos que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n} \sqrt{n})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n} n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2(\frac{n}{2})} n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 e^{-2(\frac{n}{2})} \frac{n}{2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2(\frac{n}{2})} \cdot \frac{n}{2}$$

Usando el CV: $m = n/2$, notemos $n \rightarrow \infty \Rightarrow m \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} n = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-2m} \cdot m = 2 \cdot 0 = 0 //$$

• Definiendo $u = \ln(n)$, notemos $n \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$. Además $e^u = n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \cdot \ln(n) = \lim_{u \rightarrow \infty} (e^u)^{-1} \cdot u = \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} \cdot u = 0 //$$

P3) c) Primero mostramos $S_n > 0 \quad \forall n$

CB) ($n=0$) $S_0 = 1 > 0$

HI) Para $n \in \mathbb{N}$: $S_n > 0$

PS) PPQ: $S_{n+1} > 0$

Notemos $S_{n+1} = f(S_n) = e^{\frac{1}{3}S_n} \sqrt{S_n(S_n+2)}$

$\hookrightarrow$ Como $S_n > 0 \Rightarrow S_n(S_n+2) > 0 \Rightarrow \sqrt{S_n(S_n+2)} > 0$

$\hookrightarrow$ Además $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\frac{1}{3}S_n} > 0$

Luego $S_{n+1} > 0$

• Ahora, mostramos que $f(x) > x \quad \forall x \in (0, +\infty)$:

Sea $x > 0$:

$* e^{\frac{1}{3}x} > 1$

$* \frac{2}{x} > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{3}x} \sqrt{x(x+2)}}{x} = e^{\frac{1}{3}x} \sqrt{\frac{x+2}{x}} > \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} > 1$$

$\therefore f(x) > x \quad \forall x > 0$

Con esto, podemos concluir pues $S_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y

$S_{n+1} = f(S_n) > S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Por contradicción, si (S_n) es acotado $\Rightarrow (S_n)$ converge, digamos a $L > 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{3}S_n} \sqrt{S_n(S_n+2)}$$

$$\Rightarrow L = e^{\frac{1}{3}L} \sqrt{L(L+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = e^{\frac{1}{3}L} \sqrt{\frac{L+2}{L}} / L^2$$

$$\Rightarrow 1 = e^{\frac{2}{3}L} \frac{(L+2)}{L}$$

$$\Rightarrow 1 = e^{\frac{2}{3}L} \left(1 + \frac{2}{L}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{3}L} = 1 + \frac{2}{L}$$

Esto es una contradicción pues $\frac{2}{3}L > 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{2}{3}L} < 1 \quad \wedge \quad 1 + \frac{2}{L} > 1$$