

Aux 11 Calc

P1) a) Sabemos que $\frac{3}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$, y adem as $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ pues $\frac{3}{2} > 1$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = +\infty$

b) Notemos que $0 \leq \frac{1+(-j)^n}{3} \leq \frac{2}{3} \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{1+(-j)^n}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego por Sandwich $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+(-j)^n}{3}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+(-j)^n}{3}\right)^n = 0$$

* pues $|\frac{2}{3}| < 1$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^n \right] = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{n}}}_{(1)} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n}_{(2)}$$

• (1) Notemos que $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[n]{\frac{8}{27}}$

Luego por prop: $\sqrt[n]{\frac{8}{27}} \rightarrow 1$

• (2) Notemos que $a_n = \frac{2}{n} \rightarrow 0$, entonces $a_n \rightarrow a$, con $|a| < 1$

Luego por prop: $(a_n)^n = \left(\frac{2}{n}\right)^n \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{n}} + \left(\frac{2}{n}\right)^n \right] = 1 + 0 = 1$$

P4) a) Notamos que

$$\hookrightarrow x(2-x) \leq 1$$

$$\hookrightarrow 2x - x^2 \leq 1$$

$$\hookrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

• Notamos que esto es una ec. cuadrática de discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

Luego la parábola solo toca el eje x una sola vez.

Además el coef de x^2 es $1 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$$\therefore \forall x \in \mathbb{R}: x(2-x) \leq 1$$

b) Por inducción; $\forall n \geq 1: a_n \in (0, 1)$

• Por (c), se sabe que $a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

• Mostremos por inducc. que $a_n \geq 0$:

CB $n=1$) $a_1 = a \in (0, 1) \rightarrow a_1 \geq 0$

HI) Asume para $n \in \mathbb{N}$: $a_n \in (0, 1)$

PJ) $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$

$$\hookrightarrow \text{Como } a_n \in (0, 1) \Rightarrow (2 - a_n) \in (1, 2) \text{ . Luego } a_n(2 - a_n) \geq 0$$

$$\therefore a_{n+1} \in (0, 1)$$

c) ~~Per induc. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} > a_n$~~

$$\text{Notamos que } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n(2 - a_n)}{a_n} = 2 - a_n > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

d) Como a_n es estrict. creciente y $a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ converge a su supremo, en particular; digamos converge a l

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n - a_n^2 \Rightarrow l = 2l - l^2 \Rightarrow l^2 - l = 0$$

$$\Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} l_1 = 0 \\ l_2 = 1 \end{matrix}$$

Como a_n estrict. creciente y $a_1 = a > 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 1$

P3) a) Notemos que:

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Luego } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = e \cdot 0 = 0$$

b) Como ya sabemos que $a_n \rightarrow 0$, entonces sabemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: |a_n - 0| < \varepsilon$$

• Como $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, ~~nos~~ queda equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: a_n < \varepsilon$$

Luego, tomando $\varepsilon = 1$, nos queda:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: a_n < 1$$

$$\Rightarrow a_n < 1$$

Probemos con $n = 3$:

$$\hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} < 1 \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 - 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 1 = \frac{64}{27} - 1$$

$$\hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n+1 \quad = \frac{37}{27} < 3$$

$$\hookrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 < n$$

Luego la desigualdad es cierta con $n_0 = 3$, por lo tanto:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \leq 10, \forall n \geq n_0: a_n < 1$$

c) Notemos que $a_{10^6} = \frac{(10^6 + 1)^{10^6 - 1}}{(10^6)^{10^6}} = \frac{y}{x}$

$$\text{Como claramente } 10^6 \geq 10 \Rightarrow a_{10^6} < 1 \Rightarrow \frac{y}{x} < 1 \Rightarrow y < x$$