P1. Volver a los fundamentos.

Demuestre usando la definición de convergencia que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0.$$

Sol: Queremos demostrar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| \leq \epsilon.$$

Primero, notemos que para todo $n \geq 1$, el denominador es positivo. Trabajando la desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| &\leq \epsilon \\ \frac{1}{n-(-1)^n} &\leq \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} + (-1)^n &\leq n \end{aligned}$$

Dividiendo por casos, tenemos:

(a) Si n es par, entonces:

$$\frac{1}{\epsilon} + 1 \leq n$$

(b) Si n es impar, entonces:

$$\frac{1}{\epsilon} - 1 \leq n$$

Luego, basta tomar $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} + 1\right] + 1$, así la desigualdad buscada se cumplirá independiente de si n es par o impar.

P2. Desde algún momento se tendrá que hacer 0

Sea (u_n) una sucesión que converge a $\frac{1}{2}$. Pruebe que la sucesión (v_n) definida por $v_n = [u_n]$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

Sol: Como (u_n) converge a $\frac{1}{2}$, entonces por definición se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leq \epsilon$$

Como sirve para todo $\epsilon > 0$, en particular, podemos tomar un $\epsilon^* = \frac{1}{4}$, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| u_n - \frac{1}{2} \right| &\leq \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4} \leq u_n - \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} \leq u_n &\leq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que, a partir del instante $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$: $u_n \in (0, 1)$. Esto implica que $[u_n] = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :& [u_n] = 0 \\
\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :& v_n = 0
\end{aligned}$$

Luego, esto implica que (v_n) converge a 0, pues es una sucesión constante igual a 0 a partir del instante n_0.

P3. Por un millón de pesos...

Decida si la afirmación es cierta o falsa. Si es cierta demuéstrela y si es falsa dé un contraejemplo:
"Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones divergentes, entonces la suma de esas sucesiones es divergente".

Sol: La afirmación es falsa. Sean las sucesiones $(a_n) = n$ y $(b_n) = -n$. Es claro que ambas divergen, luego:

$$a_n + b_n = n + (-n) = 0$$

Luego, la sucesión $(a_n + b_n)$ es constante igual a 0, por lo tanto converge a 0.