

Aux 9

P1 Quiero demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0: \left| \sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{3} \right| \leq \varepsilon$$

• Trabajemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \left| \sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{3} \right| &= \frac{\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3}} \\ &= \left| \frac{(3 - \frac{1}{n^2}) - 3}{(\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3})} \right| \end{aligned}$$

(*)

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{3}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{3}}$$

$\leq \epsilon$

Volviendo: $\frac{1}{\sqrt{3} n^2} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3} \epsilon} \leq n^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} \epsilon}} \leq n$

$\therefore C$

* C no necesariamente es natural

$$\Rightarrow n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} \epsilon}} \right\rceil + 1$$

P2) a) $\frac{1}{n + \sin(n^2)} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{\sin(n^2)}{n}} \quad \times \frac{\sin(n^2)}{n}$

es $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
no es acotado

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \sin(n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{\sin(n^2)}{n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0 //$$

b) $\frac{a_n + n}{n a_n^2 + 1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{a_n}{n} + 1}{a_n^2 + \frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 1}{a_n^2 + \frac{1}{n}} = \frac{0 + 1}{l^2 + 0} = \frac{1}{l^2} //$$

$\times$ a_n converge
 $\Rightarrow a_n$ acotado

luego $\frac{a_n}{n}$ es nulo
por acotado

$$c) \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = \frac{n^{2/3} \sin(n!)}{n+1} \cdot \frac{1/n^{2/3}}{1/n^{2/3}}$$

$$= \frac{\sin(n!)}{n^{1/3} + 1/n^{2/3}} = \underbrace{\sin(n!)}_{\text{acotade}} \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{n^{1/3} + 1/n^{2/3}}_{\text{nulls}}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = 0$$

$$d) \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} \cdot \frac{1/3^n}{1/3^n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{0 + 3}{0 + 1} = 3 \quad \square$$

* $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ suc. rule pres $\frac{2}{3} \in (0, 1)$ //

P3 a) P12 $P_n \rightarrow 0 \quad \vee \quad P_n \rightarrow b-a$

• Supongamos P_n converge a l :

$$\hookrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{P_{n+1}}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b P_n}{\underline{a + P_n}} = \frac{bl}{a+l} \Rightarrow l = \frac{bl}{a+l}$$

$$\Rightarrow al + l^2 = bl \Rightarrow l^2 + al - bl = 0$$

$$\Rightarrow l(l + (a-b)) = 0$$

$$\hookrightarrow 1) l = 0$$

$$2) l = b - a \quad \boxed{b}$$

b) • Mostremos que $P_n \supset \forall n$, por inducción

CB $P_0 \supset 0$ ✓

HI $P_n \supset 0$ algún n

PI $P_{n+1} = \frac{b P_n}{a + P_n} \Rightarrow P_{n+1} \supset 0$ ✓

• Ahora vemos que es decreciente ($P_{n+1} \leq P_n$)

$$P_{n+1} = \frac{bP_n}{a+P_n} < \frac{bP_n}{a} < P_n$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 pues $P_n > 0$ $a > b$
 $\Rightarrow \frac{b}{a} < 1$

$\therefore P_n$ es
decreciente
estricta

• luego, tenemos que (P_n) decreciente y $P_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (P_n)$ es convergente a l , con $l \geq 0$

$\Rightarrow$ Por la parte (c): (P_n) converge a 0 □

c) $a < b$ y $0 < p_0 < b - a$

• Veamos $0 < p_n < b - a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por inducción:

CB) ✓

II) $\exists n \nexists 0 < p_n < b - a$

P) $p_{n+1} = \frac{b p_n}{a + p_n} < b - a$

$\therefore 0 < p_n < b - a$

$\Leftrightarrow \cancel{b p_n} < ab - a^2 + \cancel{b p_n} - a p_n$

$\forall n \in \mathbb{N} //$

$\Leftrightarrow 0 < a(b - a - p_n) / \cdot \frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow 0 < b - a - p_n$

$\Leftrightarrow p_n < b - a$ ✓ por II

• Veamos (P_n) creciente $(P_{n+1} > P_n)$

$$P_{n+1} = \frac{bP_n}{a+P_n} > P_n \quad \checkmark$$

/ $\cdot \frac{1}{P_n}$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+P_n} > 1 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow b > a+P_n \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow P_n < b-a \quad \checkmark$$

∴ (P_n) es estricta
creciente //

• Hemos concluido que $0 < p_n < b-a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (p_n) es creciente

$\Rightarrow$ (p_n) converge, en particular a su supremo

$\hookrightarrow$ De (4) vimos que $p_n \rightarrow 0 \quad \vee \quad p_n \rightarrow b-a$

$\Rightarrow$ (p_n) converge a $b-a$, pues $p_0 > 0$ y (p_n)
es creciente 