P1. Interesante

Sea $B = \left\{ (-1)^n \dfrac{1+n^2}{2+n^2} | n \in \mathbb{N} \right\}$. Demuestre que $\sup(B) = 1$ ¿Podemos saber el valor de $\inf(B)$? De poder, calcúlelo.

Sol: Primero, mostremos que B posee supremo, para esto, basta mostrar que no es vacío y que tiene alguna cota superior.

- B es distinto de vacío, pues utilizando $n = 1$, tenemos que el elemento $(-1)^1 \cdot \dfrac{1+1^2}{2+1^2} = -\dfrac{2}{3} \in B$.
- Notemos además que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{1+n^2}{2+n^2} \right| = \frac{1+n^2}{2+n^2},$$

  y además, esta cantidad está acotada por 1, en efecto:

$$\begin{aligned} 1 &< 2 \\ 1+n^2 &< 2+n^2 \\ \frac{1+n^2}{2+n^2} &< 1. \end{aligned}$$

  Luego, concluimos que para cualquier $b \in B : |b| < 1$, es decir:

$$\forall b \in B : -1 < b < 1. \tag{1}$$

  Luego, 1 es cota superior de B

Por el axioma del supremo, concluimos que B posee un supremo $sup(B)$. Nos falta mostrar ahora que $sup(B) = 1$, hagámoslo por doble desigualdad.

- Como 1 es cota superior de B, y por definición, el supremo de un conjunto es la menor de las cotas superiores, entonces concluimos que $sup(B) \leq 1$.
- Por contradicción, supongamos que $sup(B) < 1$, luego, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $sup(B) + \varepsilon = 1$. Por definición del supremo, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot \frac{1+n^2}{2+n^2} + \varepsilon \leq 1 \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot (1+n^2) + \varepsilon(2+n^2) \leq 2+n^2 \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+n^2) \leq 2+n^2 - (-1)^n(1+n^2) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+n^2) \leq 2 - (-1)^n + n^2(1-(-1)^n) \\ \implies & \forall n = 2m, m \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+(2m)^2) \leq 2 - (-1)^{2m} + (2m)^2(1-(-1)^{2m}) \\ \iff & \forall n = 2m, m \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+(2m)^2) \leq 1 \\ \iff & \forall n = 2m, m \in \mathbb{N} : 2\varepsilon + 4m^2\varepsilon \leq 1 \\ \implies & \forall m \in \mathbb{N} : 4\varepsilon m^2 \leq 1 \\ \implies & \forall m \in \mathbb{N} : \varepsilon m^2 \leq 1 \\ \implies & \forall m \in \mathbb{N} : m\sqrt{\varepsilon} \leq 1 \\ & . \end{aligned}$$

  En definitiva, hemos concluido que $\exists \varepsilon' = \sqrt{\varepsilon} > 0, \forall m \in \mathbb{N} : m\varepsilon' \leq 1$, lo cuál es una contradicción con la propiedad arquimediana. Luego, por contradicción, hemos mostrado que $1 \leq sup(B)$.

Juntando ambas desigualdades, concluimos finalmente que $sup(B) = 1$.

Para calcular el ínfimo de B, primero debemos mostrar que este existe. Ya vimos anteriormente que B es no vacío, y además, de la ecuación (1) podemos ver que -1 es cota inferior de B. Luego, B posee un ínfimo $inf(B)$.

Proponemos a -1 como ínfimo de B, es decir, $inf(B) = -1$, y para mostrarlo, se hace un procedimiento análogo al hecho anteriormente para mostrar que $sup(B) = 1$:

- Como -1 es cota inferior de B, y por definición, el ínfimo de un conjunto es la mayor de las cotas inferiores, entonces concluimos que $inf(B) \geq -1$.
- Por contradicción, supongamos que $inf(B) > -1$, luego, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $inf(B) - \varepsilon = -1$. Por definición del ínfimo, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot \frac{1+n^2}{2+n^2} - \varepsilon \geq -1 \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N} : (-1)^n \cdot (1+n^2) - \varepsilon(2+n^2) \geq -(2+n^2) \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+n^2) \leq (-1)^n(1+n^2) + (2+n^2) \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+n^2) \leq (-1)^n + 2 + n^2((-1)^n + 1) \\
\implies &\forall n = 2m+1, m \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+(2m+1)^2) \leq (-1)^{2m+1} + 2 + (2m+1)^2((-1)^{2m+1} + 1) \\
\iff &\forall n = 2m+1, m \in \mathbb{N} : \varepsilon(2+(2m+1)^2) \leq 1 \\
\iff &\forall n = 2m+1, m \in \mathbb{N} : 2\varepsilon + 4m^2\varepsilon + 4m\varepsilon + \varepsilon \leq 1 \\
\implies &\forall m \in \mathbb{N} : 4\varepsilon m \leq 1 \\
\implies &\forall m \in \mathbb{N} : \varepsilon m \leq 1.
\end{aligned}$$

  En definitiva, hemos concluido que $\exists \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N} : m\varepsilon \leq 1$, lo cuál es una contradicción con la propiedad arquimediana. Luego, por contradicción, hemos mostrado que $-1 \geq inf(B)$.

Juntando ambas desigualdades, concluimos finalmente que $inf(B) = -1$.

P2. Entre dos gigantes

Sean A, B dos subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacíos tales que:

- $A \cup B = \mathbb{R}$.
- $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a < b$.

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. ¿Es α único?.

Sol: De la segunda condición:

$$\forall a \in A, [\forall b \in B : a < b],$$

podemos concluir que $\forall a \in A$: a es cota inferior de B. Como además B es no vacío, entonces posee un ínfimo $inf(B)$.

- Por definición, $inf(B)$ es una cota inferior de B.
- Como mencionamos antes, $\forall a \in A$: a es cota inferior de B, y como $inf(B)$ es por definición la mayor de las cotas inferiores de B, tenemos:
$$\forall a \in A : a \leq inf(B).$$
es decir, $inf(B)$ es cota superior de A.

Luego, $\alpha = inf(B)$ es un real que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B.

¿Es este $\alpha = inf(B)$ único? Por contradicción, supongamos que no, es decir, $\exists \beta \neq \alpha$ tal que β es cota superior de A y cota inferior de B simultaneamente.
Notemos que A y B son disjuntos por la segunda condición, pero además, la primera condición nos dice que $A \cup B = \mathbb{R}$. Luego β tiene 2 opciones: O está en A o está en B.

(a) Si β está en B, entonces por definición de ínfimo:
$$\alpha = inf(B) \leq \beta.$$
Pero además β es cota inferior de B, por lo que se cumple:
$$\beta \leq inf(B) = \alpha.$$
Luego, juntando ambas ecuaciones, concluimos que $\beta = \alpha$, lo cuál es una contradicción.

(b) Si $\beta \in A$, como además β es cota superior de A, entonces $\beta = max(A) = sup(A)$.
Como β es cota inferior de B, entonces tenemos que $\beta \leq \alpha$, pero como además, por hipótesis $\beta \neq \alpha$, entonces tenemos que $sup(A) = \beta < \alpha = inf(B)$.
Luego, notemos que $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ es un número real que no está ni en A ni en B:
- $\beta = \dfrac{\beta+\beta}{2} < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, luego no puede pertenecer a A, pues es mayor estricto que su supremo.
- $\dfrac{\alpha+\beta}{2} < \dfrac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha$, luego no puede pertenecer a B, pues es menor estricto que su ínfimo.

Luego, esto contradice el hecho de que $A \cup B = \mathbb{R}$.

Por último, como em ambos casos hemos llegado a contradicciones, concluimos entonces que $\beta = \alpha$, y por tanto, α es único.

P3. Calentando motores

Usando la definición de convergencia de una sucesión muestre que:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{3n-7} = \frac{2}{3}$$

Sol: Usando la def. de convergencia, queremos mostrar que:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| \frac{2n-5}{3n-7} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Trabajemos el término dentro del valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n-5}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| &= \left|\frac{3(2n-5)-2(3n-7)}{3(3n-7)}\right| \\
&= \left|\frac{6n-15-6n+14}{9n-21}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{9n-21}\right| \\
&= \frac{1}{|9n-21|}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\left|\frac{2n-5}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{|9n-21|} \leq \varepsilon.$$

Notemos también que $\forall n \geq 3 : |9n-21| = 9n-21$, luego:

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 3 : \frac{1}{|9n-21|} \leq \varepsilon \\
\iff &\forall n \geq 3 : \frac{1}{9n-21} \leq \varepsilon \\
\iff &\forall n \geq 3 : \frac{1}{\varepsilon} \leq 9n-21 \\
\iff &\forall n \geq 3 : \frac{1}{\varepsilon} + 21 \leq 9n \\
\iff &\forall n \geq 3 : \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{21}{9} \leq n
\end{aligned}$$

Luego, hemos concluido que:

$$\left|\frac{2n-5}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{21}{9} \leq n, n \geq 3.$$

Entonces, tomando $n_0 = \max\left(3, \left\lceil \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{21}{9} \right\rceil\right)$ se cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \max\left(3, \left\lceil \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{21}{9} \right\rceil\right) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left|\frac{2n-5}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon.$$