

Aux 7 (alc)

P1) a) Por contradicción, supongamos N acotado superior.

Como $N \neq \emptyset \Rightarrow$ Posee supremo, digamos $c = \sup(N)$.

Luego $c-1$ no es cota superior de N , es decir:

$$\exists n_0 \in N \text{ t.q. } c-1 < n_0 \Rightarrow c < n_0+1 \in N$$

Es decir, concluimos que $\exists n_1 \in N$, $n_1 = n_0+1$ t.q. $c < n_1$

Esto es una contradicción, pues $c = \sup(N)$ $\rightarrow$ $\square$

b) Por contradicción, supongamos $\exists x_0 > 0$ t.q. $\forall n \in N: nx_0 \leq 1$

$\Rightarrow \exists x_0 > 0$, $\forall n \in N: n \leq \frac{1}{x_0}$, es decir, $\frac{1}{x_0}$ es cota superior de N $\rightarrow$ $\square$

○

P2) a) Estudiemos los elementos de A :

$$\text{Sea } n \in N, \text{ luego } n+1 > n \geq 0 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \geq 0$$

$$\therefore \forall x = \frac{n}{n+1}, n \in N \in A : x \geq 0 \Rightarrow 0 \text{ es cota inferior de } A$$

$$\text{Además, con } n=0 \in N \Rightarrow x = \frac{n}{n+1} = \frac{0}{1} = 0 \in A \Rightarrow 0 \in A$$

$$\therefore 0 = \min(A)$$

$\hookrightarrow$ Como A posee mínimo $\Rightarrow A$ posee ínfimo, $\inf(A) = \min(A) = 0$

Además, $(-\infty, 0]$ son todas las cotas inferiores de A //

b) Por contradicción, supongamos que $\sup(A) < 1$, es decir:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \sup(A) = 1 - \varepsilon$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}: \frac{n}{n+1} \leq 1 - \varepsilon \Rightarrow n \leq n+1 - \varepsilon(n+1)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(n+1) \leq 1$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\Rightarrow n\varepsilon \leq 1 - \varepsilon$$

Es decir: $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}: n\varepsilon \leq 1 - \varepsilon$ ~~esto contradice la prop. arquimediana~~

• Además $\forall n \in \mathbb{N}: n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1$, luego 1 es cota superior de A
 $\therefore \sup(A) = 1$

• A no posee máximo, pues en caso de existir: $\max(A) \in A \wedge \max(A) = \sup(A)$
 $\Rightarrow 1 \in A \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \frac{n_0}{n_0+1} = 1 \Rightarrow n_0 = n_0+1$ ~~contradictorio~~

P3) Como $W \neq \emptyset \Rightarrow \forall x_0 \in W$:

$$\forall x \in V: x + x_0 < 0 \Rightarrow x < -x_0 \quad \therefore -x_0 \text{ es cota superior de } V$$

• Como $V \neq \emptyset \Rightarrow V$ posee supremo, además, como $\forall y \in W: -y$ es cota superior de V:

$$\forall y \in W: \sup(V) \leq -y \Rightarrow y \leq -\sup(V)$$

(luego $-\sup(V)$ es cota superior de W, como $W \neq \emptyset \Rightarrow W$ tiene supremo, y además:

$$\sup(W) \leq -\sup(V) \Rightarrow \sup(W) + \sup(V) \leq 0$$

P4) $3 \tan^2(x) + 5 = \frac{7}{\cos(x)}$

* Demander que $\cos(x) \neq 0$
 $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 3 \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 5 = \frac{7}{\cos(x)} \quad / \cdot \cos^2(x)$$

$$\Rightarrow 3 \sin^2(x) + 5 \cos^2(x) = 7 \cos(x)$$

$$\Rightarrow 3(\sin^2(x) + \cos^2(x)) + 2 \cos^2(x) - 7 \cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2(x) - 7 \cos(x) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Caso 1) $\cos(x) = \frac{12}{4} = 3$ Impossible

Caso 2) $\cos(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{~~Donc~~} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$