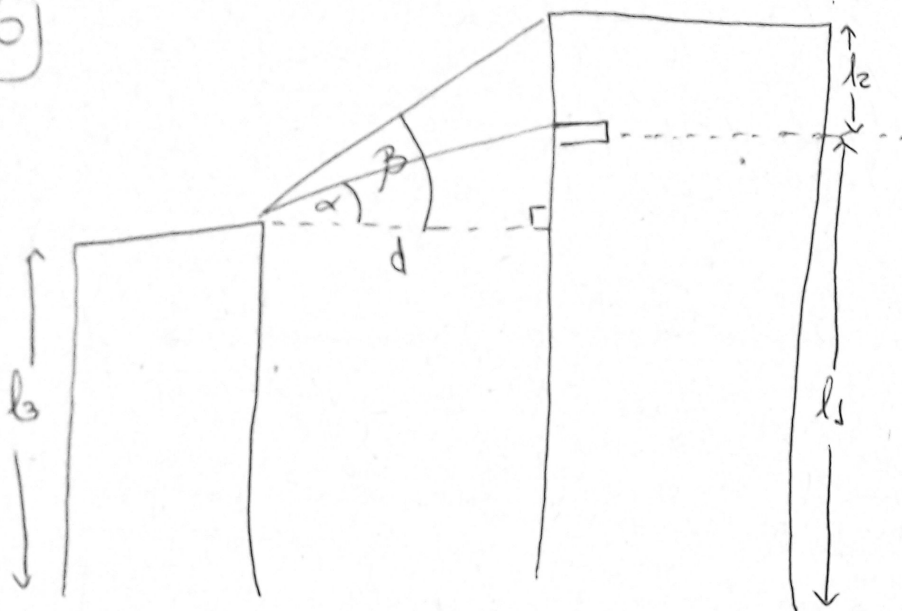


RP 6)

PJ)



Queremos calcular d :

• Notemos $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{l_1 + l_2 - l_3}{d} \Rightarrow d = \frac{(l_1 + l_2 - l_3)}{\operatorname{tg}(\beta)}$

$\therefore d = (l_1 + l_2 - l_3) \operatorname{ctg}(\beta)$

P2) $f(x) = \frac{1 + \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

• Dominio: Como f es función racional, sacamos del dominio los puntos donde se indefine, ie:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\therefore \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus A$

• Signos: Como $\forall x \in \operatorname{Dom}(f): -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \sin(x) \leq 2$

$\forall x \in \operatorname{Dom}(f): -1 \leq \cos(x) < 1 \Rightarrow -1 < -\cos(x) \leq 1$

$\Rightarrow 0 < 1 - \cos(x) \leq 2$

luego $\forall x \in \operatorname{Dom}(f): f(x) \geq 0$

• Ceros: Buscamos aquellos puntos en donde $f(x) = 0$:

~~$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \sin(x) = 0\}$~~

$$\begin{aligned}\text{Ceros} &= \{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) = 0\} = \{x \in \text{Dom}(f) \mid 1 + \sin(x) = 0\} \\ &= \{x \in \text{Dom}(f) \mid \sin(x) = -1\}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ceros} = \{x \in \text{Dom}(f) \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

• Paridad: Probaremos por contraejemplo, que f no es par ni impar

Par) Sea $x = \pi/2$

$$\Rightarrow f(\pi/2) = \frac{1 + \sin(\pi/2)}{1 - \cos(\pi/2)} = \frac{1+1}{1-0} = 2 \quad \therefore f \text{ no es par}$$

$$\cdot f(-\pi/2) = f(3\pi/2) = 0$$

Imper) Con el mismo ejemplo anterior, se ve que f no es impar.

• Periodicidad: Queremos probar $\forall x \in \text{Dom}(f): f(x+p) = f(x)$, con p el periodo. Como f está definida a partir de $\sin$ y $\cos$, proponemos que el periodo de f es 2π , probémoslo:

↳ Sea $x \in \text{Dom}(f)$

$$\Rightarrow f(x+2\pi) = \frac{1 + \sin(x+2\pi)}{1 - \cos(x+2\pi)} = \frac{1 + \sin(x)}{1 - \cos(x)} = f(x)$$

periodo de $\sin$ y $\cos$ es 2π

$\therefore f$ es periódica, de periodo $p = 2\pi$

• Inyectividad: f no puede ser inyectiva, pues es una función periódica. Más aún, posee más de un cero

$\therefore f$ no inyectiva

P3. $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ y seamos:

$$\hookrightarrow \frac{\sin(2\alpha)}{2\operatorname{ctg}(\alpha)} + \frac{\sin(2\beta)}{2\operatorname{ctg}(\beta)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} + \frac{2\sin(\beta)\cos(\beta)}{2\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = \cos^2(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\pi/2 - \alpha) = \cos^2(\beta)$$

Por casos:

$$1) \cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\beta) \Rightarrow \pi/2 - \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \pi/2 //$$

$$2) -\cos(\pi/2 - \alpha) = -\cos(\beta) \Rightarrow \pi/2 - \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \pi/2 //$$

$$3) -\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\beta) \leftarrow \text{Imposible, pues } -\cos(\pi/2 - \alpha) < 0 \text{ y } \cos(\beta) > 0 //$$

$$4) \cos(\pi/2 - \alpha) = -\cos(\beta) \leftarrow \text{Imposible, pues } -\cos(\beta) < 0 \text{ y } \cos(\pi/2 - \alpha) > 0 //$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi/2$$