MA1001-3 Introducción al Cálculo
Profesores: Cristián Reyes R
Auxiliares: Sebastián López T., Gonzalo Salas V.

Problemas Semana 4:

1 de Abril de 2022

Problemas

P1. No pueden ser otro

Usando los axiomas de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades, fundamentando cada paso

i) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$(a+b=0) \wedge (a+c=0) \implies (b=c)$$

ii) Demuestre que si $\forall b \in \mathbb{R},\ a \cdot b = a \implies a = 0$

R:

i) Por método exploratorio, tomando como verdadero la expresión $(a+b=0) \wedge (a+c=0)$, concluimos que b es inverso aditivo de a, y que c es inverso aditivo de a.
Por unicidad del inverso, tenemos que $b = c$.

ii) Por contradicción, tenemos que $[\forall b \in \mathbb{R},\ a \cdot b = a] \wedge a \neq 0$. Como $a \neq 0$, entonces a posee un inverso multiplicativo a^{-1}:

$$\forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b = a \backslash \cdot a^{-1}$$
$$\forall b \in \mathbb{R} : b = 1$$

lo cuál es claramente una contradicción.

P2. Abrazo de 2 puntos

Sean las circunferencias:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

(a) Describa ambas circunferencias indicando su centro y su radio, haga un bosquejo de ambas.

(b) Encuentre los puntos de intersección entre las circunferencias.

R:

(a) Llamaremos C_1 a la ecuación de la primera circunferencia, y C_2 a la segunda ecuación. Notemos que estas ecuaciones son equivalentes a:

$$C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$
$$C_2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Estas son ecuaciones de circunferencia en su forma estándar. Por lo tanto, C_1 es una circunferencia de centro $(2,3)$ y radio 3. C_2 es una circunferencia de centro $(1,-1)$ y radio 4.

(b) Un punto de intersección es un punto que cumple las ecuaciones de ambas circunferencias en simultaneo, por lo tanto, resolvemos el sistema:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

Restándole la ecuación de la circunferencia C_1 a C_2, obtenemos:

$$2x + 8y - 18 = 0$$

Y despejando x obtenemos:

$$x = 9 - 4y$$

Esta última es la ecuación de una recta, es decir, los puntos de intersección entre ambas circunferencias deben vivir en la recta que hemos obtenido. Usando esta recta en la ecuación de la circunferencia C_1:

$$\begin{aligned} (9-4y)^2 - 4(9-4y) + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 9 \\ 81 - 72y + 16y^2 - 36 + 16y + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 9 \\ 17y^2 - 62y + 49 &= 0 \end{aligned}$$

De esta última ecuación cuadrática, obtenemos las soluciones $y_1 = \dfrac{31+8\sqrt{2}}{17}$ e $y_2 = \dfrac{31-8\sqrt{2}}{17}$.
Reemplazando estos valores en la ecuación de la recta, nos da $x_1 = \dfrac{29+32\sqrt{2}}{17}$ y $x_2 = \dfrac{29-32\sqrt{2}}{17}$.
Por lo tanto, los puntos de intersección de las circunferencias C_1 y C_2 son $\left(\dfrac{29+32\sqrt{2}}{17}, \dfrac{31+8\sqrt{2}}{17}\right)$ y $\left(\dfrac{29-32\sqrt{2}}{17}, \dfrac{31-8\sqrt{2}}{17}\right)$.

P3. Un clásico de inecuaciones

Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x}{|x-1|} \geq \frac{|x-1|}{x-2}$$

R: Dividiremos el problema en 2 casos:

Caso 1: Estudiemos los $x > 1$, en este caso, $|x-1| = x-1$, luego la ecuación queda:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{|x-1|} &\geq \frac{|x-1|}{x-2} \\
\frac{x}{x-1} &\geq \frac{x-1}{x-2} \\
x &\geq \frac{(x-1)^2}{x-2} \\
0 &\geq \frac{(x-1)^2}{x-2} - x \\
0 &\geq \frac{(x-1)^2 - x(x-2)}{x-2} \\
0 &\geq \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x}{x-2} \\
0 &\geq \frac{1}{x-2}
\end{aligned}$$

Luego, esto último sucede solo cuando $x < 2$. Como inicialmente asumimos que $x > 1$, la solución de este caso son todos los $x \in (1, 2)$.

Caso 2: Estudiemos los $x < 1$, en este caso $|x-1| = 1-x$, luego la ecuación queda:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{|x-1|} &\geq \frac{|x-1|}{x-2} \\
\frac{x}{1-x} &\geq \frac{1-x}{x-2} \\
x &\geq \frac{(1-x)^2}{x-2} \\
0 &\geq \frac{(1-x)^2}{x-2} - x \\
0 &\geq \frac{(1-x)^2 - x(x-2)}{x-2} \\
0 &\geq \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x}{x-2} \\
0 &\geq \frac{1}{x-2}
\end{aligned}$$

Luego, esto último sucede solo cuando $x < 2$. Como inicialmente asumimos que $x < 1$, la solución de este caso son todos los $x \in (-\infty, 1)$.

Finalmente, juntando las soluciones de ambos casos, nos queda que la solución del problema original es $x \in [(-\infty, 1) \cup (1, 2)]$.