P1. Cuando son sólo 2 es fácil, con 3 se complica un poco

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, utilizando las propiedades de orden de los números reales demuestre que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

R: Recordando que para cualquier $a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$, y que si $a, b, c \geq 0$, entonces $a + b + c \geq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz + z^2 &\geq 0 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) &\geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq xy + xz + yz\end{aligned}$$

P2. Calculando promedios

La *media geométrica* entre dos números $x, y \geq 0$ se calcula mediante la fórmula:

$$MG(x, y) = \sqrt{xy}$$

Mientras que la *media aritmética* se tiene la fórmula usual:

$$MA(x, y) = \frac{x + y}{2}$$

Usted está encargado de calcular los promedios de un curso que consta de dos evaluaciones. Si le interesa que los alumnos tengan la mejor nota posible ¿Qué fórmula utilizaría?

R: Por contradicción, asumiremos que $\sqrt{xy} > \frac{x+y}{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} &> \frac{x + y}{2} \\ 2\sqrt{xy} &> x + y \\ 4xy &> (x + y)^2 \quad (*) \\ 4xy &> x^2 + 2xy + y^2 \\ 0 &> x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &> (x - y)^2\end{aligned}$$

Esto último es una contradicción pues $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Luego, por contradicción, hemos demostrado que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

(*) Aquí hemos utilizado que para $a, b > 0$, si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$, lo cuál es necesario demostrar:

$$\begin{aligned}b &> a \\ b - a &> 0 \\ (b - a)(b + a) &> 0 \\ b^2 - a^2 &> 0 \\ b^2 &> a^2\end{aligned}$$

P3. ¿Qué pasa si mezclamos igualdades y desigualdades?

Sean a, b, c, u, v, w reales:

a) Demuestre que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $u^2 + v^2 + w^2 = 3$ entonces $2 \geq au + bv + cw$

R: Usando un argumento similar al de P1:

$$\begin{aligned}(a - u)^2 + (b - v)^2 + (c - w)^2 &\geq 0 \\ a^2 - 2au + u^2 + b^2 - 2bv + v^2 + c^2 - 2cw + w^2 &\geq 0 \\ (a^2 + b^2 + c^2) + (u^2 + v^2 + w^2) - 2(au + bv + cw) &\geq 0 \\ 1 + 3 - 2(au + bv + cw) &\geq 0 \\ 4 &\geq 2(au + bv + cw) \\ 2 &\geq au + bv + cw\end{aligned}$$