

## Resumen Control #4 MA1001

Dudas - Consultas - Comentarios: gianfranco.liberona@gmail.com

### 1 Trigonometría (Recuerdo Control Anterior y Materia Nueva)

#### 1.1 Descripción general de funciones seno, coseno y tangente

- a)  $\text{sen}(x)$ . Dominio:  $\mathbb{R}$ , Recorrido:  $[-1,1]$ , impar, periódica de período  $2\pi$ , ceros =  $\text{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Positiva entre  $0$  y  $\pi$ , creciente entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  y decreciente entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ .
- b)  $\text{cos}(x)$ . Dominio:  $\mathbb{R}$ , Recorrido:  $[-1,1]$ , par, periódica de período  $2\pi$ , ceros =  $\text{cos}^{-1}(\{0\}) = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Positiva entre  $0$  y  $\frac{\pi}{2}$  y negativa entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ , decrece entre  $0$  y  $\pi$ .
- c)  $\text{tan}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ . Dominio:  $\mathbb{R}$  excluyendo los ceros de  $\text{cos}(x)$ , Recorrido:  $\mathbb{R}$ , impar, periódica de período  $\pi$ , sus ceros son los mismos de  $\text{sen}(x)$ , positiva en  $(0, \frac{\pi}{2})$  y estrictamente creciente en intervalos  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ .

#### 1.2 Funciones recíprocas

- a)  $\text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$
- b)  $\text{csc}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$
- c)  $\text{cot}(\alpha) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\text{tan}(x)}$

#### 1.3 Identidades Fundamentales

- a)  $\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1$ .
- b)  $\text{sec}^2(\alpha) = 1 + \text{tan}^2(\alpha)$ .
- c)  $\text{csc}^2(\alpha) = 1 + \text{cot}^2(\alpha)$ .

#### 1.4 Identidades de suma y resta de ángulos

- a)  $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \text{cos}(\beta) \pm \text{sen}(\beta) \text{cos}(\alpha)$
- b)  $\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) \mp \text{sen}(\beta) \text{sen}(\alpha)$
- c)  $\text{tan}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tan}(\alpha) \pm \text{tan}(\beta)}{1 \pm \text{tan}(\alpha) \cdot \text{tan}(\beta)}$

#### 1.5 Identidades de suma y resta de senos y cosenos

- a)  $\text{sen}(\alpha) \pm \text{sen}(\beta) = 2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha \pm \beta}{2}) \text{cos}(\frac{\alpha \mp \beta}{2})$
- b)  $\text{cos}(\alpha) + \text{cos}(\beta) = 2 \cdot \text{cos}(\frac{\alpha + \beta}{2}) \text{cos}(\frac{\alpha - \beta}{2})$
- c)  $\text{cos}(\alpha) - \text{cos}(\beta) = -2 \cdot \text{sen}(\frac{\alpha + \beta}{2}) \text{sen}(\frac{\alpha - \beta}{2})$
- d)  $\text{tan}(\alpha) \pm \text{tan}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta)}$

## 1.6 Identidades de ángulos doble y medio

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}(2\alpha) &= 2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) & \text{b) } \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \\ \text{c) } \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) & \text{d) } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} \\ \text{e) } \tan(2\alpha) &= \frac{2 \tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} & \text{f) } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} \end{aligned}$$

El signo del ángulo medio depende de en qué cuadrante esté  $\frac{\alpha}{2}$

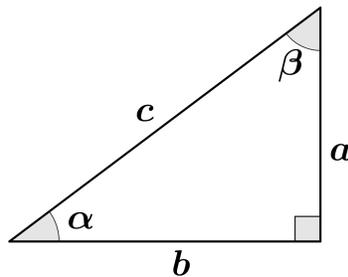
## 1.7 Regla de cuadrantes

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}(2\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{sen}(\alpha) & \text{b) } \operatorname{sen}(\pi \pm \alpha) &= \mp \operatorname{sen}(\alpha) & \text{c) } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos(\alpha) \\ \text{a) } \cos(2\pi \pm \alpha) &= \cos(\alpha) & \text{b) } \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos(\alpha) & \text{c) } \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \operatorname{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

## 1.8 Tabla de valores importantes

$x^\circ$ (grados)	$x$ (radianes)	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0^\circ$	0	0	1	0
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
$180^\circ$	$\pi$	0	-1	0
$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-

## 1.9 Representación en triángulo rectángulo



$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{a}{c}. \\ \text{b) } \cos(\alpha) &= \frac{b}{c}. \\ \text{c) } \tan(\alpha) &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

## 1.10 Teoremas del Seno y del Coseno

Sea un triángulo  $ABC$  cualquiera de lados  $a, b, c$  y sus ángulos interiores respectivos  $\alpha, \beta, \gamma$  (opuestos a  $a, b$  y  $c$  respectivamente, como el triángulo anterior pero sin la necesidad de que  $\gamma$  sea recto), se cumplen las siguientes relaciones

a) Teorema del Seno:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$$

b) Teorema del Coseno:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha). \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta). \end{aligned}$$

## 1.11 Funciones trigonométricas inversas

- a)  $\arcsin(x)$ : Dominio:  $[-1, 1]$ , Recorrido:  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ;  $\sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x$ .
- b)  $\arccos(x)$ : Dominio:  $[-1, 1]$ , Recorrido:  $[0, \pi]$ ;  $\cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x$ .
- c)  $\arctan(x)$ : Dominio:  $\mathbb{R}$ , Recorrido:  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ;  $\tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x$ .

## 1.12 Soluciones de ecuaciones trigonométricas

- a)  $\sin(x) = a$ : Las soluciones son de la forma

$$x = k\pi + (-1)^k \alpha,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $\arcsin(a) = \alpha$ .

- b)  $\cos(x) = a$ : En este caso, las soluciones son de la forma

$$x = 2k\pi \pm \alpha,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tal que  $\arccos(a) = \alpha$ .

- c)  $\tan(x) = a$ : Aquí tenemos soluciones de la forma

$$x = k\pi + \alpha,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  tal que  $\arctan(a) = \alpha$ .

Notar que en el caso de las dos primeras ecuaciones, es necesario que  $|a| \leq 1$ , pues en caso contrario no existen soluciones.

## 2 Axioma del Supremo

### 2.1 Definiciones Básicas

- a) Un conjunto  $A$  se dice *acotado superiormente* si existe un real  $c \in \mathbb{R}$  que sea mayor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq c.$$

A  $c$  se le denomina *cota superior* del conjunto  $A$ , y si además  $c \in A$  se denomina *máximo* del conjunto. Notar que cualquier otro real mayor o igual a una cota superior de  $A$ , también es cota superior del conjunto.

- b) Un conjunto  $A$  se dice *acotado inferiormente* si existe un real  $d \in \mathbb{R}$  que sea menor o igual que *todos* los elementos del conjunto en cuestión. Vale decir, si verifica que

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq d.$$

A  $d$  se le denomina *cota inferior* del conjunto  $A$ , y si además  $d \in A$  se denomina *mínimo* del conjunto. Notar que cualquier otro real menor o igual a una cota inferior de  $A$ , también es cota inferior del conjunto.

- c) Un real  $s \in \mathbb{R}$  se dice *supremo* de un conjunto  $A$  (y lo denotamos  $s = \sup(A)$ ), si es cota superior de él y a la vez es la menor de las cotas superiores. Cuando el máximo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su supremo.
- d) Un real  $s \in \mathbb{R}$  se dice *ínfimo* de un conjunto  $A$  (y lo denotamos  $s = \inf(A)$ ), si es cota inferior de él y a la vez es la mayor de las cotas inferiores. Cuando el mínimo de un conjunto existe, es necesariamente igual a su ínfimo.

### 2.2 Axioma del Supremo

- a) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente, posee supremo.
- b) Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente, posee ínfimo.

## 2.3 Propiedad Arquimediana

El conjunto de los números reales se dice arquimediano, esto quiere decir, que para todo real  $x > 0$ , existe un natural  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, tal que  $n \cdot x > 1$  o análogamente, tal que  $x > \frac{1}{n}$ . En términos de cuantificadores, escribimos

$$(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad nx > 1.$$

## 2.4 Propiedades e Ideas Generales

a) Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Si definimos a partir de ellos los conjuntos

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\},$$

tenemos entonces que

- i)  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .
  - ii)  $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ .
- b) El axioma del supremo y la propiedad arquimediana pueden ser usados para demostrar una serie de propiedades interesantes de muchos conjuntos numéricos (que los naturales son infinitos, la densidad de los racionales en los reales, la existencia del conjunto de los irracionales, etc).
- c) Ideas para demostraciones: en general, suele ser una buena idea para demostrar que un real es supremo o ínfimo de un conjunto en particular, razonar por contradicción.
- i) Si  $s$  es una cota superior de un conjunto no vacío  $A$ , y se desea demostrar que  $s = \sup(A)$ , suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , el real  $s - \varepsilon$  *no puede ser* cota superior de  $A$ . En palabras simples, se está demostrando que no podemos restar nada a  $s$  para que siga siendo cota superior, y por ende  $s$  es la menor de ellas.
  - ii) Si  $s$  es una cota inferior de un conjunto no vacío  $A$ , y se desea demostrar que  $s = \inf(A)$ , suele ser una buena forma para verificar esto último mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , el real  $s + \varepsilon$  *no puede ser* cota inferior de  $A$ . En palabras simples, se está demostrando que no podemos sumar nada a  $s$  para que siga siendo cota inferior, y por ende  $s$  es la mayor de ellas.