

MA1101-1 Introducción al Cálculo**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Patricio Yáñez A.**Auxiliar 5: Elipses y Funciones en una Variable**

11 Abril 2022

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es inyectiva cuando

$$(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- Sobreyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es sobreyectiva cuando

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$

- Biyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto

$$Z(f) = \{x \in \text{Dom}(f) | f(x) = 0\}$$

- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B

- f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda

- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$

- f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$

- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. [Elipses y rectas]C2-MA1001-2015.P1

Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2 , donde $f > A$. Si $\bar{F}$ es el simétrico de F con respecto a la recta L_1 , encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y $\bar{F}$ y cuyo semieje mayor mide a , donde $a > f - A$.

Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

- P2.** Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto (x_0, y_0) , tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) , como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima.

Nota: Utilice propiedades de parábolas.

- P3.** Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $f(x) = |x^2| - 2$

$$d) f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

P4. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 6x^2 - x - 5$$

$$b) g(x) = f(x + 1)$$

$$c) h(x) = f(|x|)$$

P5. Sea las siguientes funciones analice sus características y luego grafíquelas:

$$a) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{|x| + 2}$$

P6. Considere la función f definida por $\frac{x}{x^2 - 1}$. Se pide

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(1 + x_2 \cdot x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)((x_2)^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f , indicando en qué intervalos esta función es creciente y en cuáles decreciente.

c) Calcule $f((1, \infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \iota(x) : (1, \infty) &\rightarrow f((1, \infty)) \\ x &\rightarrow \iota(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

d) Bosqueje el gráfico de f

1. Propuestos:

P7. Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

$$a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$b) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$c) h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 5x + 4}$$

