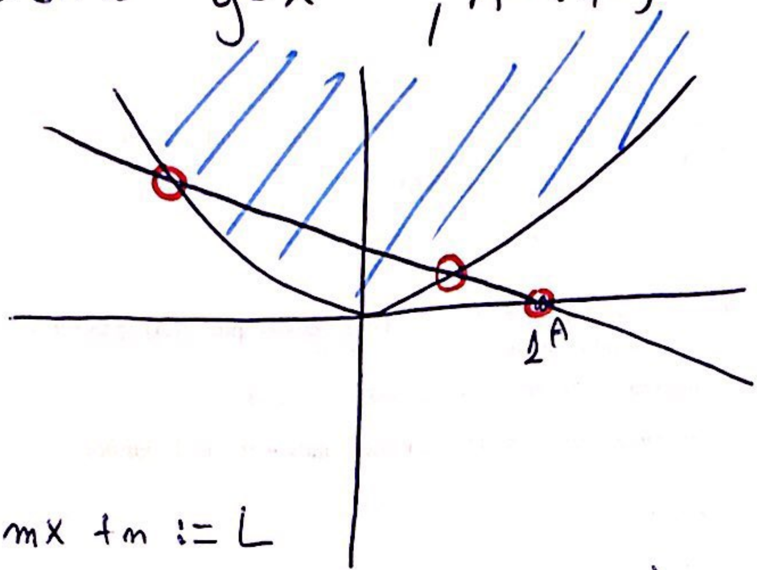
P1

Auxiliar 4

Considere $y = x^2$, $A = (1,0)$



$y = mx + m := L$

a) Entonces lo que me pides es intersectar la recta con la parábola

- Sé que la recta pasa por A

$\Rightarrow (1,0) \in L. \Rightarrow y = mx + m \Rightarrow 0 = m + m$
$\Rightarrow m = -m$ ||

$\Rightarrow y = mx - m$

Intersectando $\Rightarrow mx - m = x^2$
$0 = x^2 - mx + m$ | Intersección.

La cuadrática en función de la variable m.

Como quiero 1 o más $\Rightarrow \Delta \geq 0$.

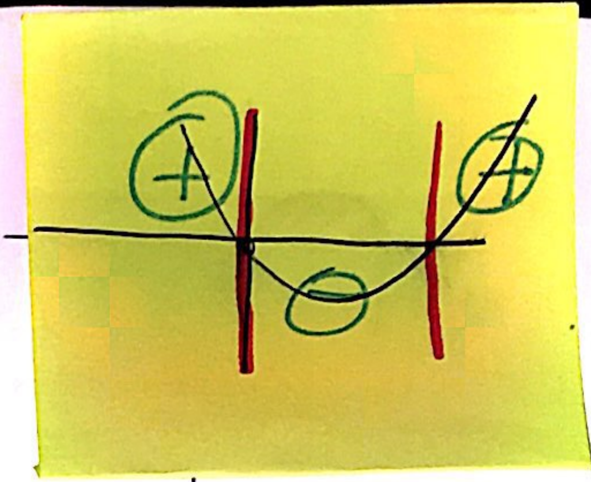
Recordemos que si $\Delta \geq 0$ la cuadrática tiene 2 o 1 solución.

$0 = x^2 - mx + m$

$a = 1,\ b = -m,\ c = m$

$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4\cdot 1\cdot m$

$= m^2 - 4m \geq 0$



otra parábola

$m(m-4) \geq 0$

Esto es una parábola

$\Rightarrow m^2 - 4m \leq 0$ si $m \in [0,4]$

$m^2 - 4m \geq 0$ si $m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty+)$

$C = (-\infty, 0] \cup [4, \infty+)$ // $m \in C$. !!! !!

b) $m \in \mathbb{R}$. Sea P y Q puntos de intersección.

Parábola = recta

$f(x) = x^2 - mx + m$. → su solución $\Leftrightarrow x^2 - mx - m =$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $a = 1$; $-m = b$; $-m = c$

Calculo M con el punto medio de P y Q

$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4m}}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = x_M$

Como P y Q ∈ L puedo calcular M, solo sacando punto medio.

↳ su crecimiento es constante.

$$\Rightarrow \frac{\frac{m + \cancel{\sqrt{m^2 + 4m}}}{2} + \frac{m - \cancel{\sqrt{m^2 + 4m}}}{2}}{2}$$

$x_M = \frac{2m}{4} = \frac{m}{2}$ ⇒ reemplazo en ecuación de recta y saco y_M

$L: mx - m = y$

$y_M = m \cdot \frac{m}{2} - m = \frac{m^2 - 2m}{2}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Hagamos una construcción para la próxima parte!

Sea $y = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Sabemos que vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (x_0, y_0)$

Luego la escribiremos de la forma

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x-x_0)^2$$

Tomemos !!!

(Como es lunes! :))

$$y = ax^2+bx+c$$

$$y = \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)a$$

↳ Recordemos $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$

Hagamos esta forma

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$z^2 = x^2 \qquad 2zw = \frac{b}{a}x$$

$\Rightarrow z = x$

Como $z = x$

$$2\cancel{x}w = \frac{b}{a}\cancel{x}$$

$$w = \frac{b}{2a}$$

Luego $y = \overbrace{x^2}^{z^2} + 2 \cdot \overbrace{\frac{b}{2a}}^{w}\overbrace{x}^{z} + \overbrace{\frac{b^2}{4a^2}}^{w^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}$

$$y = \left[\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right] a$$

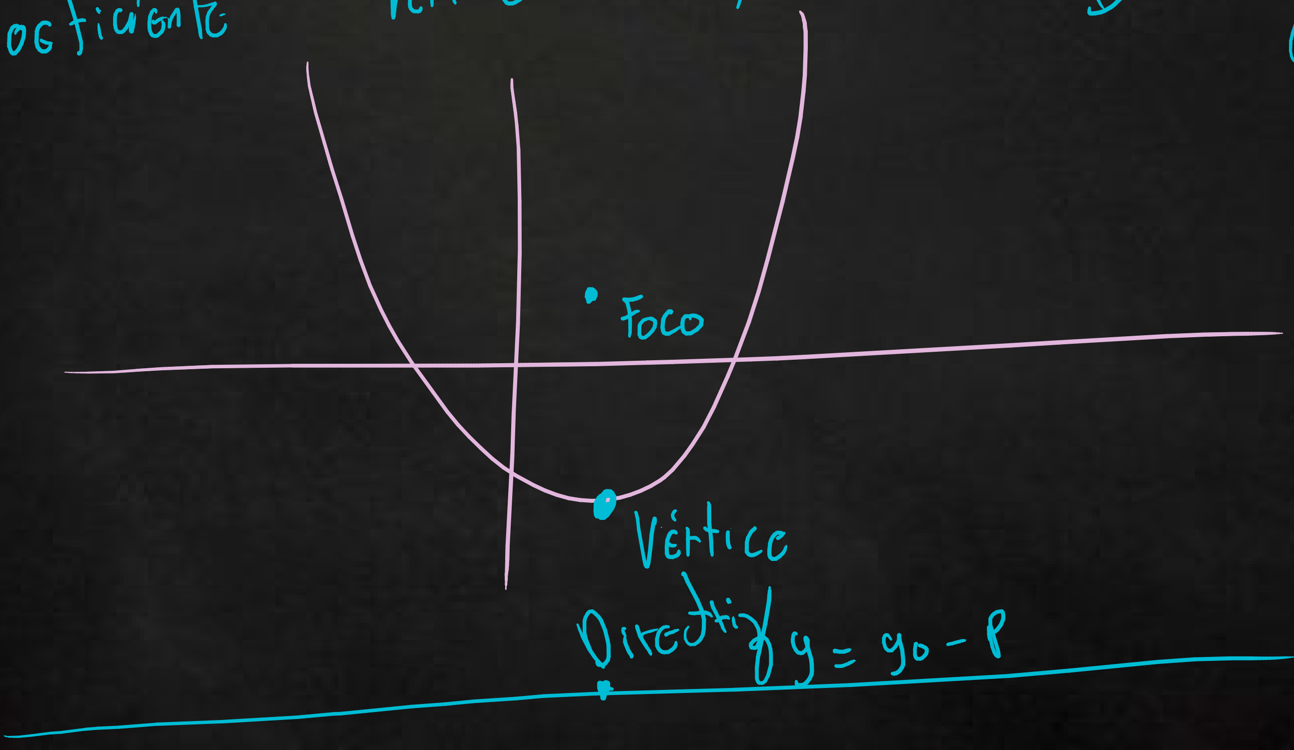
$$y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$\underbrace{y - \left(\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)}_{y_0} = \underbrace{a}_{=\frac{1}{4p}}\left(x - \underbrace{\left(\frac{-b}{2a}\right)}_{x_0}\right)^2$$

$$y - y_0 = \frac{1}{4\left(\frac{1}{4a}\right)}\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 \iff y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$$

★ $p := \frac{1}{4a}$ $\quad V(x_0, y_0)$ $\quad (x_0, x_0+p)$ $\quad y = y_0 - p$

Coeficiente $\quad$ Vértice $\quad$ Foco $\quad$ Directriz



c) ¿Qué recorre M?

Según $X_M = \frac{m}{2} \Rightarrow 2X_M = m$

Con esto dejamos m como conocido en función de X_M

$y_M = mX_M - m = 2X_M \cdot X_M - 2X_M$

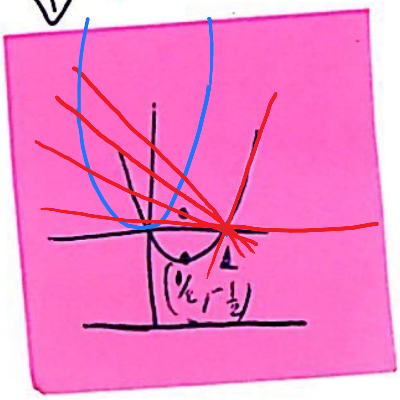
$$\boxed{y_M = 2(X_M^2 - X_M)}$$ → Parábola que describe $\boxed{X_M, y_M}$!!!

$y = 2x^2 - 2x$

$a = 2,\ b = -2,\ c = 0$

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = V\left(\frac{2}{4}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$= V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$!!!



Recordamos $p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{8}$

Ver resumen Parábolas.

Luego $x_F,\ y_F + p$

foco $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$

$(x_0, y_0 + p)$

directriz. $y = y_F - p = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{8}$ //

$y = y_0 - p$

Scanned with CamScanner

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl