

## MA1101-3 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.



## Auxiliar 1: Axiomas de cuerpo de los Reales

14 de Marzo de 2022

- Axioma 1: Conmutatividad.

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$1. x + y = y + x$$

$$2. x \cdot y = y \cdot x$$

- Axioma 2: Asociatividad.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$$

$$1. x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$2. x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- Axioma 3: Distributiva.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$$

$$1. x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$2. (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

- Axioma 4a: Existencia de elemento neutro para la suma.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1.  $x + e = x = e + x$ , Notemos que solo nos garantiza la existencia del neutro pero, no sabemos cuantos hay.

- Axioma 4b: Existencia de elemento neutro para el producto.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1.  $x \cdot e = x = e \cdot x$ , Notemos que solo nos garantiza la existencia del neutro pero, no sabemos cuantos hay.

- Axioma 5: Existencia de elemento inverso.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1.  $x + \text{opuesto}(x) = 0$ , Notemos que el opuesto o inverso aditivo de  $x$  cumple dicha ecuación.

2.  $(\forall (x \neq 0)) x \cdot \text{recíproco}(x) = 1$ , Siendo 1 el neutro aditivo para la suma, notemos que el recíproco o inverso multiplicativo de  $x$  cumple dicha ecuación.

- Teorema:  $\forall x \in \mathbb{R}$  su inverso aditivo es único. Además,  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , su inverso multiplicativo también es único. Estos elementos se denotarán  $-x$  y  $x^{-1}$  respectivamente.

**P1. [Demostraciones fundamentales.] El objetivo de esta pregunta es ver métodos de demostración en conjunto a probar propiedades fundamentales.**

Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

- a) Absorción del 0 o 0 aniquila  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$

Nota: Recordar lo visto en cátedras que el neutro aditivo es único.

- b)  $\forall a \in \mathbb{R}, (-a)^{-1} = -(a)^{-1}, a \neq 0$

- c)  $\exists!$  neutro multiplicativo para el cuerpo de los reales.

- d)  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^{-1})^{-1} = x, x \neq 0$

- e)  $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

f) Sea  $ab \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

**P2. [Relacionando demostraciones y contenido]** Cabe mencionar que lo que busca esta pregunta es relacionar los métodos de demostración, trabajarlos y justificarlos mediante axiomas de cuerpo.

Utilizando los axiomas de cuerpo y teoremas de unicidad de neutros e inversos.

Demuestre:

Dado  $a, b \in \mathbb{R}$  no nulos, que cumplen  $a + b = 1 \Rightarrow$  el inverso multiplicativo de  $a \cdot b$ , es  $a^{-1} + b^{-1}$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

**P3. [Lógica y Axiomas]** El objetivo es relacionar los valores de verdad a través de la justificación axiomática.

Usando sólo los axiomas de cuerpo y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre que:

Si existiera  $a \neq 0$  tal que  $a + a = 0$ , entonces se concluiría que:

$\forall x \in \mathbb{R}, x + x = 0$  Si necesita alguna propiedad extra debe demostrarla.

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

**P4. [Nula]** Seguir desarrollando las capacidades, habilidades que se requieren para la materia

Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente propiedad, fundamentando cada paso( si necesita alguna propiedad extra, debe demostrarla): Demostrar que si  $a \cdot b = a \Rightarrow a = 0$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

