Tarea 1

Fecha de Entrega: 16-04-2022

P1. Lógica

(a) **(0.3 pts.)** ¿Es verdadera o falsa la siguiente proposición? Justifique su respuesta.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean p, q y r proposiciones lógicas. Pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Longrightarrow \sim q) \land (\sim p \lor q) \land r] \Longrightarrow \sim p$$

(c) **(0.4 pts.)** Sea E un conjunto de referencia. Muestre que la proposición:

$$\forall x \in E, \exists y \in E \text{ tal que } P(x) \Rightarrow P(y)$$

Es verdadera para cada predicado P definido sobre E.

P2. Conjuntos

(a) **(0.4 pts.)** Dados dos conjuntos A y B se define la **diferencia simétrica**, que denotamos $A \triangle B$, como el conjunto de los elementos que están en B, pero no están en A, o están en A, pero no en B. Más formalmente:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Sean A y B dos conjuntos tales que $A \cap B \neq \phi$. Muestre que:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

(b) **(0.3 pts.)** Sean A, B conjuntos no vacíos. Muestre que:

$$A \cap B = \phi \quad \Longrightarrow \quad A \cup B^c = B^c$$

(c) **(0.3 pts.)** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $x \in A$ es el **mínimo** de, que denotamos $\text{mín}(A) = x$ si y solo si $\forall y \in A$ $x \leq y$. Muestre que el mínimo de A es único. Es decir, muestre que si $\bar{x}$ y $\hat{x}$ son el mínimo de A, entonces $\bar{x} = \hat{x}$.

P3. Funciones

(a) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Pruebe que si la composición $g \circ f$ es una función sobreyectiva, entonces g también lo es. Construya además un contraejemplo que muestre que f no necesariamente es sobreyectiva.

(b) **(0.3 pts.)** Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Muestre que si f y g son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

(c) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función $\psi : A \times B \to A$ definida por:

$$\psi(a, b) = a$$

a) **(0.2 pts.)** Demuestre que ψ es sobreyectiva.

b) **(0.2 pts.)** ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto B la función ψ resulta inyectiva? Justifique su respuesta.

P4. Límites

(a) Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

a) **(0.2 pts.)** (a_n) definida por:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n - n}$$

b) **(0.2 pts.)** (b_n) definida por:

$$b_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 + n}$$

Podría ser útil recordar que:

$$\forall x > 1, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(b) **(0.2 pts.)** Decimos que una sucesión (s_n) es una **sucesión acotada** si $\exists M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$|s_n| < M$$

Sea (u_n) una sucesión convergente. Muestre que (u_n) es una sucesión acotada.

Indicación: Note que para cualquier conjunto finito de números reales $\{p_i\}_{i=1}^n$, existe una constante M_p tal que $|p_i| < M_p, \forall i = 1, ..., n$.

(c) **(0.2 pts.)** Estudie el límite cuando x tiende a 0 de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Indicación: Analice los límites laterales.

(d) **(0.2 pts.)** Demuestre, usando la definición de límite de funciones, que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

P5. Derivadas

(a) **(0.2 pts.)** Utilizando la definición de la derivada, pruebe que dadas $f, g : A \to B$, se tiene que:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

(b) Derive las siguientes funciones de variable real a valores reales:

a) **(0.2 pts.)** $f(x) = x^3 - 2xcos(x) + 2 - x^2sen(x)$.

b) **(0.2 pts.)** $g(x) = x^2ln(x) + e^{4sen(x)cos(x)}$.

(c) **(0.2 pts.)** Muestre que la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^x}$$

Viene dada por $f'(x) = -f(x)\ln(x)$.

(d) Considere un mercado con función de demanda inversa dada por:

$$P(q) = 100 - q$$

Y una firma con función de costos dada por:

$$C(q) = q^2 + 10q$$

a) **(0.1 pts.)** Suponga que cuando la firma se comporta de manera competitiva, la condición de equilibrio es que $P(q) = C'(q)$. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio. ¿Cuál es la utilidad de la firma?

b) **(0.1 pts.)** Caracterice el equilibrio considerando comportamiento monopólico por parte de la firma. Es decir, cuando ella resuelve:

$$\max_{q \geq 0} P(q) \cdot q - C(q)$$

Compare sus respuestas.

P6. Matrices

(a) **(0.2 pts.)** Sean $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in M_{nn}$, $A \in M_{np}$ y $B \in M_{mn}$. Demuestre que:

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{1\cdot} \\ \vdots \\ \lambda_n A_{n\cdot} \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{\cdot 1} & \cdots & \lambda_n B_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

Recuerde que, dada una matriz $A \in M_{mn}$, $A_{i\cdot}$ denota su i-ésima fila y $A_{\cdot j}$ si j-ésima columna:

$$A_{i\cdot} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad A_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(b) Sea $\mathcal{H} = \{H = (h_{ij}) \in M_{nn} : h_{ij} = 0, \forall i > j + 1\}$.

a) **(0.2 pts.)** Muestre que $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de M_{nn}.

b) **(0.2 pts.)** Demuestre que si $T \in M_{nn}$ es triangular superior, $H \in \mathcal{H}$, entonces $T \cdot H \in \mathcal{H}$.

(c) **(0.2 pts.)** Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. Muestre que la matriz

$$A = I - 2uu^t$$

es invertible, con $A^{-1} = A$.

(d) **(0.2 pts.)** Sea la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & -1 & p \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine valores de k y p de modo que $(1, 1, 1)^t$ sea vector propio de A.