INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3272 - Decisiones Bajo Incertidumbre
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: Felipe Del Solar, Matias Muñoz, Natalia Trigo.

Auxiliar #7

Procesos de Poisson II

Problema 1 - Repaso Poisson

Considere una sala de cine con capacidad para 200 personas. La entrada a la función es de p [$] por persona. Sin embargo, si el cliente es "socio" del cine se le hace un 20 % de descuento.

Asuma que las personas llegan al cine de acuerdo a un proceso de Poisson a comprar las entradas y que cada persona compra sólo una entrada. Las entradas para la función de las 22 : 00 horas comienzan a venderse durante el mismo día desde las 16:00 horas, y la boletería se cierra a las 22 : 00.

Las tasa de llegada es de 40 personas/hora, y cada una persona posee tarjeta de socio con una probabilidad de un 25 %.

a) Si usted sabe que se vendieron n entradas ¿Cuál es la probabilidad de que i entradas se hayan vendido a "socio" del cine?.

Podemos definir tres variables aleatorias asociadas a los tres conteos que queremos llevar en este proceso:

- $N(t)$:= # de clientes que han llegado hasta el instante t.
- $N_A(t)$:= # de clientes "socios" que han llegado hasta el instante t.
- $N_B(t)$:= # de clientes "normales" que han llegado hasta el instante t.

Y para facilitar notación en cuanto a ventas podemos definir también las variables aleatorias asociadas a estas:

- $V(t)$:= # de ventas hasta el instante t.
- $V_A(t)$:= # de ventas a "socios" hasta el instante t.
- $V_B(t)$:= # de ventas "normales" hasta el instante t.

Es fácil ver que los procesos asociados a A y B son una división del proceso original; es decir, que $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$. Luego, notemos que no importa si los clientes que llegaron fueron en total más de n (que hayan superado los 200), dado que la proporción teórica entre clientes tipo A y B se mantiene entre las n entradas vendidas, independiente de cuántos clientes llegaron, por lo que podemos simplemente analizar el caso $n \leq 200$ con las variables aleatorias Poisson anteriores para obtener la probabilidad pedida. Dicho esto, podemos escribir entonces, dado $n < 200$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_A(t) = i | V(t) = n\right) &= \mathbb{P}\left(N_A(t) = i | N(t) = n\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(N_A(t) = i \wedge N(t) = n\right)}{\mathbb{P}\left(N(t) = n\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(N_A(t) = i \wedge N_B(t) = n - i\right)}{\mathbb{P}\left(N(t) = n\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(N_A(t) = i\right) \cdot \mathbb{P}\left(N_B(t) = n - i\right)}{\mathbb{P}\left(N(t) = n\right)}
\end{aligned}$$

Donde $t = 6$ $(horas)$. Como, por enunciado, $N(t)$ ocurre de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 40$ $(\frac{personas}{hora})$, por lo que se cumple que $N_A(t)$ ocurre de acuerdo a un proceso de Poission de tasa λp_A (con $p_A = 0{,}25$) y que $N_B(t)$ ocurre de acuerdo a un proceso de Poission de tasa $\lambda(1 - p_A)$. A partir de esto, podemos directamente obtener las probabilidades anteriores:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_A(t) = i | V(t) = n\right) &= \frac{\frac{(\lambda p_A t)^i \cdot e^{-\lambda p_A t}}{i!} \cdot \frac{(\lambda(1-p_A)t)^{(n-i)} \cdot e^{-\lambda(1-p_A)t}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}} \\
&= \binom{n}{i} \frac{(\lambda p_A t)^i \cdot e^{-\lambda p_A t} \cdot (\lambda(1 - p_A)t)^{(n-i)} \cdot e^{-\lambda(1-p_A)t}}{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}} \\
&= \binom{n}{i} \frac{(\lambda t)^i {p_A}^i \cdot (\lambda t)^{(n-i)} (1 - p_A)^{(n-i)} \cdot e^{-\lambda t}}{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}} \\
&= \binom{n}{i} {p_A}^i \cdot (1 - p_A)^{(n-i)}
\end{aligned}$$

Este resultado tiene total sentido, ya que simplemente tenemos n casos totales y con probabilidad p_A un clientes es de tipo A, por lo que es una binomial, donde los éxitos son los clientes de tipo A y los fracasos lo contrario. Para el caso $n \geq 200$ basta con ocupar esta interpretación, dado que se tienen n ventas y que con probabilidad p_A una venta es de tipo A, entonces la probabilidad pedida es la función de probabilidad de una Bernoulli con parámetro p_A, tal cual el resultado anterior.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan n entradas ($n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$)?

La probabilidad de que se vendan n entradas cambia si es que $n < 200$ o $n = 200$, ya que, si $N(t) > 200$, se estarán vendiendo 200 entradas para todos los casos. Luego, separamos entonces el calculo entonces:

$\boxed{\text{n<200}}$ En este caso coinciden las ventas con el número de clientes que llegan.

$$\mathbb{P}\left(V(t) = n\right) = \mathbb{P}\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$\boxed{\text{n=200}}$ En este caso no coinciden las ventas con el número de clientes que llegan. Incluye todos los casos en donde $N(t) \geq n$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(V(t) = n\right) = \mathbb{P}\left(N(t) \geq n\right) &= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(N(t) = k\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad queda definida como:

$$\mathbb{P}\left(V(t) = n\right) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} & \text{si } n < 200 \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} & \text{si } n = 200 \\ 0 & \text{si } n > 200 \end{cases}$$

c) ¿Cuál es la utilidad esperada por función?

En este caso podemos usar la ley de esperanzas iteradas para facilitarnos el cálculo, ya que la utilidad depende tanto de las ventas realizadas en total como de la proporción de clientes “socios” que compran. Luego, podemos escribir la utilidad esperada por función como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Utilidad\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Utilidad | V(t)\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[Utilidad | V(t) = n\right] \cdot \mathbb{P}\left(V(t) = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Utilidad | V(t) = n, V_A(t)\right]\right] \cdot \mathbb{P}\left(V(t) = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left[Utilidad | V(t) = n, V_A(t) = i\right] \cdot \mathbb{P}\left(V_A(t) = i | V(t) = n\right) \right) \cdot \mathbb{P}\left(V(t) = n\right)\end{aligned}$$

En esta última expresión de esperanza vemos que ya deja de existir incertidumbre sobre la utilidad, ya que ya existe un valor fijo de ventas (que va a depender del valor de n) y también existe un valor fijo del número de clientes “socios”. Luego, la expresión puede ser reemplazada entonces simplemente por la utilidad en función de estos dos valores. Como los socios pagan el 80 % del precio normal, entonces la función de utilidad queda definida como $Utilidad(n, i) = i \cdot p \cdot 0{,}8 + (n - i) \cdot p$ con lo que la expresión anterior queda:

$$\mathbb{E}\left[Utilidad\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (i \cdot p \cdot 0{,}8 + (n - i) \cdot p) \cdot \mathbb{P}\left(V_A(t) = i | V(t) = n\right) \cdot \mathbb{P}\left(V(t) = n\right)$$

Notamos además que las probabilidades con las que nos quedamos son las calculadas en las partes $a)$ y $b)$, por lo que basta con reemplazar por estos valores para obtener la esperanza pedida. Me asustan las expresiones muy grandes, así que queda propuesto el reemplazo.

d) **(propuesto)** Suponga que la administración del cine ha decidido no vender más de 50 entradas a precio rebajado para cada función. Una vez alcanzado este límite, se rechazará a los "socio" del cine (asuma que los clientes a los que se les rechace la entrada rebajada no optarán por pagar el valor completo, sino que se retirarán). ¿Cuál es la probabilidad que se vendan 50 entradas a precio rebajado?.

Para calcular esta probabilidad debemos notar que se deben cumplir dos cosas para que se vendan 50 entradas de tipo A:

(1) Que lleguen al menos 50 personas socias antes de las t horas. i.e. $N_A(t) \geq 50$

(2) Que la 50-ésima persona de tipo A llegue a más tardar antes que la 151-ésima persona de tipo B, ya que la capacidad máxima sigue siendo de 200 personas. i.e. $S_{50}^A \leq S_{151}^B$. Donde S_i^T es la v.a. que representa el instante en el que llega la $i-$ésima persona de tipo T.

Notemos también podemos escribir la primera condición en función de S_{50}^A con la equivalencia $S_{50}^A \leq t \iff N_A(t) \geq 50$, con lo que la probabilidad pedida puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_A(t)=50\right) &= \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq S_{151}^B \wedge S_{50}^A \leq t\right) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq S_{151}^B \wedge S_{50}^A \leq t | S_{151}^B = z\right) f(z)dz \\
&= \int_0^{t} \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq z\right) f(z)dz + \int_t^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq t\right) f(z)dz \\
&= \int_0^{t} \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq z\right) f(z)dz + \mathbb{P}\left(S_{50}^A \leq t\right) \cdot (1 - F(t))
\end{aligned}$$

Donde f es la función densidad de S_{151}^B y F su función distribución acumulada. Sabemos que, al ser $N_A(y)$ y $N_B(y)$ procesos de Poisson, entonces $S_i^T \sim Gamma(i, \lambda_T)$; es decir, $S_{50}^A \sim Gamma(50, \lambda p_A)$ y $S_{151}^B \sim Gamma(151, \lambda(1-p_A))$, con lo que la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_A(t)=50\right) = &\int_0^t \left(\int_0^z \frac{(\lambda p_A)^{50}}{\Gamma(50)} x^{50-1} e^{-(\lambda p_A)x} dx\right) \frac{(\lambda(1-p_A))^{151}}{\Gamma(151)} z^{151-1} e^{-(\lambda(1-p_A))z} dz \\
&+ \int_0^t \frac{(\lambda p_A)^{50}}{\Gamma(50)} x^{50-1} e^{-(\lambda p_A)x} dx \cdot \left(1 - \int_0^t \frac{(\lambda(1-p_A))^{151}}{\Gamma(151)} z^{151-1} e^{-(\lambda(1-p_A))z} dz\right)
\end{aligned}$$

Con esto ya tenemos expresada la probabilidad pedida, el resto sería reemplazar por los valores reales e intentar simplificar la expresión si es que se desea.

Problema 2 - Poisson no homogéneo

A un Banco llegan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo, cuya tasa está dada por

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{14,1 - t}}, \quad 0 < t < 14,1$$

El tiempo está medido en horas, y el banco opera desde las 9 y hasta las 14 horas. Los clientes, sin embargo, llegan entre las 9 y las 14:06 hrs. Suponga que los clientes son atendidos de manera inmediata (capacidad infinita de atención).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 10:00 y las 11:00 ?

Como estamos en un proceso de Poisson no homogéneo, trabajar directamente con variables aleatorias asociadas al tiempo es más complejo. Dado esto, podemos pensar que si el primer cliente llega entre las 10 y las 11, entonces significa que hasta ese intervalo de tiempo debe haber llegado al menos una persona y que para instantes previos a las 10 no se contabilice a nadie; es decir:

$$\mathbb{P}\left(N(10) - N(9) = 0 \wedge N(11) - N(10) \geq 1\right)$$

Para simplificar notación usemos $\Delta(s,t) = N(t) - N(s)$ desde ahora en adelante. Como en Poisson no homogéneo se sigue manteniendo la propiedad de incrementos independientes cuando tenemos intervalos disjuntos, entonces, entonces la probabilidad anterior nos queda:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Delta(9,10) = 0 \wedge \Delta(10,11) \geq 1\right) &= \mathbb{P}\left(\Delta(9,10) = 0\right) \cdot \mathbb{P}\left(\Delta(10,11) \geq 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\Delta(9,10) = 0\right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(\Delta(10,11) = 0\right)\right)\end{aligned}$$

En un proceso de Poisson homogéneo habría que reemplazar simplemente por la densidad de la Poisson respectiva. Sin embargo, en este caso tenemos que la tasa de llegada $\lambda(t)$ depende del tiempo, por lo que primero debemos calcular el término que resumirá la información de la tasa en un intervalo; es decir, debemos calcular el término $m(s,t)$ para algún par s,t tal que $0 < s < t < 14,1$:

$$
\begin{aligned}
m(s,t) &= \int_s^t \lambda(x)dx \\
&= \int_s^t \frac{1}{\sqrt{14,1-x}}dx \\
&= -2\sqrt{14,1-x}\,\Big|_s^t \\
&= 2\sqrt{14,1-s} - 2\sqrt{14,1-t}
\end{aligned}
$$

Luego, con este valor podemos recuperar la densidad de una Poisson para las diferencias en un proceso no homogéneo, dado que se cumple $\Delta(s,t) \sim Poisson(m(s,t))$, con lo que tendremos que:

$$
\mathbb{P}\left(\Delta(s,t) = k\right) = \frac{(m(s,t))^k e^{-m(s,t)}}{k!}
$$

Reemplazando entonces en la probabilidad pedida:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Delta(9,10) = 0 \wedge \Delta(10,11) \geq 1\right) &= \mathbb{P}\left(\Delta(9,10) = 0\right) \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(\Delta(10,11) = 0\right)\right) \\
&= \frac{(m(9,10))^0 e^{-m(9,10)}}{0!} \cdot \left(1 - \frac{(m(10,11))^0 e^{-m(10,11)}}{0!}\right) \\
&= e^{-m(9,10)} \cdot \left(1 - e^{-m(10,11)}\right) \\
&= e^{-2\sqrt{14,1-9}+2\sqrt{14,1-10}}\left(1 - e^{-2\sqrt{14,1-10}+2\sqrt{14,1-11}}\right) \\
&= e^{-2\sqrt{5,1}+2\sqrt{4,1}}\left(1 - e^{-2\sqrt{4,1}+2\sqrt{3,1}}\right)
\end{aligned}
$$

b) Si todos los clientes se demoran exactamente 12 minutos dentro del banco, determine el número esperado de clientes dentro del banco en cualquier instante del día.

Como hay cajeros infinitos (capacidad de atención infinita), entonces la única manera de que en un instante del día una persona siga en el banco es porque está siendo atendida; es decir, si una persona llegó al banco menos de 12 minutos antes de ese instante, entonces sigue ahí y el resto ya no está. Luego, teniendo en cuenta que 12 $min = 0{,}2$ hrs, para un instante cualquiera t nos piden el valor esperado de $\Delta(t-0{,}2,t)$, que es la cantidad de personas que llegaron entre $t-0{,}2$ y t. Luego, como sabemos que $\Delta(t-0{,}2,t) \sim Poisson(m(t-0{,}2,t))$ y que la esperanza de una Poisson es su parámetro, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Delta(t-0{,}2,t)\right] &= m(t-0{,}2,t) \\
&= 2\sqrt{14{,}3-t} - 2\sqrt{14{,}1-t}
\end{aligned}
$$

c) Calcule el número promedio de clientes que se retiran indignados pensando seriamente en cambiarse de banco cada día (esto ocurre cuando el cliente encuentra que el banco ya cerró sus puertas, haciendo gala de mucha puntualidad y poca comprensión). ¿A qué hora debiese cerrar sus puertas el banco para que este número disminuya a la mitad?

Nos están pidiendo algo bastante similar a lo anterior en la primera parte. No podemos sacar realmente un promedio tal cual, sino el valor esperado de clientes que llegan después de que el banco cierra sus puertas, notando que 6 $mins = 0{,}1\ hrs$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta(14, 14{,}1)\right] &= m(14, 14{,}1)\\ &= 2\sqrt{0,1} - 2\sqrt{0}\\ &= 2\sqrt{0,1}\end{aligned}$$

Luego, para poder calcular la hora a la que debe cerrar el banco para que los clientes indignados pasen a ser la mitad basta con resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{0,1} &= \mathbb{E}\left[\Delta(x, 14{,}1)\right]\\ \sqrt{0,1} &= 2\sqrt{14{,}1 - x} - 2\sqrt{0}\\ 0,1 &= 4(14{,}1 - x)\\ x &= 14{,}1 - \frac{0{,}1}{4}\\ x &= 14{,}075\end{aligned}$$

Luego, el banco debería cerrar a las 14:04:30 para ello.