Auxiliar #11 (S2)

FGM y Suma de VA

Profesores: Andrés Cristi y Charles Thraves
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Joaquín Cisternas, Giovanna Gattini, Leonardo Meneses y Natalia Trigo

Resumen

- **N-ésimo momento de una variable aleatoria:**

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} x^n \cdot p_X(x) \\ \int_{R_X} x^n \cdot f_X(x) dx \end{cases}$$

- **N-ésimo momento central de una variable aleatoria:**

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n] = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} (x - \mathbb{E}[X])^n \cdot p_X(x) \\ \int_{R_X} (x - \mathbb{E}[X])^n \cdot f_X(x) dx \end{cases}$$

  Extra: Video de los momentos

- **Función generadora de momentos:**

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$$

- **Teorema importante:** Sean X, Y dos variables aleatorias tales que $\exists c > 0$ tal que $M_X(s) = M_Y(s)$, $\forall s \in [-c, c]$, entonces:

$$F_X(z) = F_Y(z), \ \ \forall z \in \mathbb{R}$$

- **Propiedad I:** Si X es una variable aleatoria y existe su FGM para $c > 0$, entonces:

$$M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^k] \frac{s^k}{k!}$$

- **Propiedad II:** Sea X variable aleatoria y existe su FGM, se tiene entonces para todo $s \in (-c, c)$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{\partial^n M_X(s)}{\partial s^n} \right|_{s=0}$$

- **Función generadora de momentos de un vector aleatorio:** Sea $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio y $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, su FGM está dada por:

$$M_X(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[e^{\mathbf{s}^\top X}]$$

- **Función característica:** (Al contrario de la FGM, siempre está definida).

$$\phi(\omega) = \mathbb{E}[e^{i\omega X}]$$

Distribution	$M(s)$	$\phi(\omega)$
Binomial(n,p)	$(pe^s+1-p)^n$	$\left(pe^{i\omega}+1-p\right)^n$
Poisson (λ)	$e^{\lambda(e^s-1)}$	$e^{\lambda\left(e^{i\omega}-1\right)}$
Geométrica (p)	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$	$\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}$
BinomialNegativa(n,p)	$\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^n$	$\left(\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega\omega}}\right)^n$
Uniform $[a,b]$	$\frac{e^{bs}-e^{as}}{s(b-a)}$	$\frac{e^{ib\omega}-e^{ia\omega}}{i\omega(b-a)}$
Exponential (λ)	$\frac{\lambda}{\lambda-s},\lvert s\rvert<\lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-i\omega}$
Normal $\left(\mu,\sigma^2\right)$	$e^{\mu s+\frac{\sigma^2 s^2}{2}}$	$e^{i\mu\omega-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

- **Convolución Discreta:**

  Si X_1 y X_2 son dos VA discretas **independientes**, la PMF de $Y=X_1+X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= \sum_{x_2\in R_{X_2}} P_{X_1}(y-x_2)\cdot P_{X_2}(x_2) \\ &= \sum_{x_1\in R_{X_1}} P_{X_1}(x_1)\cdot P_{X_2}(y-x_1) \end{aligned}$$

- **Convolución Continua:**

  Si X_1 y X_2 son dos VA continuas **independientes**, la PDF de $Y=X_1+X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x_2)f_{X_2}(x_2)dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(y-x_1)dx_1 \end{aligned}$$

  Y se denota como:

$$f_Y(y)=(f_{X_1}*f_{X_2})(y)$$

- **Sumas de VA independientes:**
  - Poisson(λ_1)+Poisson(λ_2) = Poisson$(\lambda_1+\lambda_2)$
  - Binomial(n,p) + Binomial(m,p) = Binomial$(n+m,p)$
  - Gamma(s,λ) + Gamma(t,λ) = Gamma$(s+t,\lambda)$
  - Exponencial(λ) + Exponencial(λ) = Gamma$(2,\lambda)$
  - Normal(μ_1,σ_1^2) + Normal(μ_2,σ_2^2) = Normal$(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Pregunta 1

Imagine que trabaja en un lavado de autos, y empieza a contar cuántos autos llegan en una hora. Después de una semana de conteo, determina que si X es la cantidad de autos que llegan en una hora, ésta tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$, es decir $X \sim Poisson(4)$, encuentre su FGM y utilizando esta determine su media y varianza.

Solución

Sabemos que la FGM se define como $M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$ con esto, la FGM de la variable aleatoria X es

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \mathbb{E}[e^{sX}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \cdot \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \cdot \frac{4^k e^{-4}}{k!} \\ &= e^{-4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4e^s)^k}{k!} \end{aligned}$$

Recordando que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y)^k}{k!} = e^y$

$$\begin{aligned} e^{-4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4e^s)^k}{k!} &= e^{-4} \cdot e^{4e^s} && (1) \\ &= e^{4(e^s - 1)} && (2) \end{aligned}$$

Para determinar la media recordamos la propiedad II del resumen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{{}_{X}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\ &= (e^{4(e^s-1)} \cdot 4e^s)|_{s=0} \\ &= e^{4(1-1)} \cdot 4e^0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Para determinar la varianza, recordamos que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2$, entonces, para calcularla, solo nos falta $\mathbb{E}(X^2)$ que podemos determinar nuevamente con la propiedad II del resumen.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{\partial^2 M_X(s)}{\partial s^2}\right|_{s=0} \\
&= (e^{4(e^s-1)} \cdot 4e^s \cdot 4e^s + 4e^s \cdot e^{4(e^s-1)})|_{s=0} \\
&= e^{4(1-1)} \cdot 4e^0 \cdot 4e^0 + 4e^0 \cdot e^{4(1-1)} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Conluyendo,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= 20 - 4^2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Pregunta 2

Una empresa aseguradora tiene negocios en Santiago, Valparaíso y Concepción. Las pérdidas en cada ciudad son independientes. Para poder entender la distribución de su pérdida encomiendan un estudio estadístico en el que definen las FGM de cada ciudad, de la siguiente forma:

$$
M_{Santiago}(t) = (1-2t)^{-3}, \quad M_{Valparaíso(t)=(1-2t)^{-2.5}}, \quad M_{Concepción}=(1-2t)^{-4.5}
$$

Si X es la pérdida combinada de las tres ciudades. Calcule:

- $E[X]$
- $Var(X)$
- $E[X^3]$

Solución

Por propiedad de la FGM se tiene que $M_{X_1+X_2...+X_N}(t) = \prod_{i=1}^{N} M_{X_i}(t)$ por ende, se tiene que

$$
\begin{aligned}
M_{Santiago+Valpo+Conce}(t) &= (1-2t)^{-3-2.5-4.5} \\
&= (1-2t)^{-10}
\end{aligned}
$$

Al igual que en el problema anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \left.\frac{{}_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} \\
&= -10(1-2t)^{-11}(-2)|_{t=0} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Para calcular la varianza recordamos $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ donde $\mathbb{E}(X)$ ya la conocemos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} \\
&= (-2)(-10)(-11)(-2)(1-2t)^{-12}|_{t=0} \\
&= 440
\end{aligned}$$

Luego, con esto $\mathbb{V}(X) = 440 - 400 = 40$. El tercer calculo $\mathbb{E}(X^3)$ se deja propuesto.

Pregunta 3

Usted acaba de ser contratado en un centro de datos de una empresa muy importante, su tarea es ver cuánto tarda el sistema en llegar al máximo de su capacidad. Según lo que le cuenta su jefe, para que esto ocurra los dos servidores que poseen, deben llegar a su límite. Considere que primero funciona hasta que llega al límite y luego comienza a trabajar el otro. El tiempo que toma que esto suceda distribuye $exp(\lambda)$ para cada uno de los servidores.

a) Calcule la FGM para el sistema completo

solución

Notemos que la variable aleatoria que representa la situación es $Y = X_1 + X_2$ donde X_1 es la variable aleatoria del tiempo que funciona el servidor 1 y X_2 la del servidor 2.
Ahora, buscamos la FGM de Y y sabemos que por propiedad de la FGM se tiene que $M_Y = M_{X_1} \cdot M_{X_2}$. Desarrollamos entonces

$$M_{X_i} = \frac{\lambda}{\lambda - s}$$

Notar que la función generadora de momentos existe solo cuando $|s| < \lambda$.
Luego, $M_Y = \frac{\lambda^2}{(\lambda-s)^2}$

b) Calcule la distribución que sigue el sistema completo

solución

Dado que la exponencial es una variable aleatoria continua, calcularemos la densidad de Y utilizando la fórmula de convolución continua.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^y f_{X_1}(y-x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
&= \int_0^y \lambda e^{\lambda(y-x_2)} \lambda e^{\lambda x_2} dx_2 \\
&= \int_0^y \lambda e^{\lambda(y-x_2+x_2)} dx_2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y dx_2 \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda y} y \\
&= \frac{\lambda(\lambda y)^{2-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(2)}
\end{aligned}
$$

Al calcular $\Gamma(2)$ verificaremos que es igual a 1

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \int_0^\infty t^{2-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t e^{-t} dt
\end{aligned}
$$

Notemos que la integral a calcular es lo mismo que la esperanza de una variable cualquiera T de distribución exponencial de tasa 1 y como sabemos que la esperanza de una exponencial es $\frac{1}{\lambda}$ esa integral vale 1. Este es un truco muy útil, pero de todas formas pueden calcular la integral usando la vaca.

Concluyendo que $Y \sim Gamma(2, \lambda)$

c) ¿Cuál es el tiempo esperado en que los servidores llegan a su capacidad máxima?

Solución

Para esta parte podemos calcular la derivada de la FGM evaluada en $s = 0$ o recordar la media de una distribución Gamma.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \left.\frac{x(t)}{\partial t}\right|_{t=0} \\
&= \lambda^2(-2)(-1)(\lambda - s)^{-3}|_{t=0} \\
&= \frac{2\lambda^2}{\lambda^3} \\
&= \frac{2}{\lambda}
\end{aligned}
$$