

P1

Pregunta 1

1. Se tienen 2 mochilas. La primera contiene 10 dulces azules, mientras que la segunda contiene 15 dulces azules. Selecciono una de las mochilas de manera aleatoria (i.e. con igual probabilidad escojo cada mochila) e introduzco 6 dulces negros en ella. Luego, revuelvo los dulces en esta mochila y saco un dulce. Si este dulce resulta ser negro, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado la primera mochila?
2. Se tienen k mochilas con M dulces azules y N dulces negros cada una. Un dulce es seleccionado aleatoriamente desde la primera mochila y es transferido a la segunda, luego se selecciona un dulce al azar desde la segunda mochila y es transferido a la tercera mochila, y así hasta llegar a la k -ésima mochila. Si después de este proceso un dulce es seleccionado de manera aleatoria desde la k -ésima mochila, muestre que la probabilidad de que este dulce sea de color azul es la misma que la probabilidad de que el primer dulce transferido desde la primera a la segunda mochila sea azul (i.e. $p = \frac{M}{M+N}$). *Hint: Podría ser de utilidad analizar dicha probabilidad en la segunda mochila, y luego para una j -ésima mochila cualquiera.*

1) $M_1 : 10 \text{ DA}$ $\leftarrow + 6 \text{ DN}$
 $M_2 : 15 \text{ DA}$

$$P(M_1 | D.N.) = \underbrace{P(D.N | M_1)}_{\substack{\text{Bayes} \\ \downarrow \\ 6/16}} \cdot \underbrace{P(M_1)}_{\nearrow 1/2} \cdot P(D.N)$$

$$P(D.N) = \underbrace{P(DN | M_1) P(M_1)}_{\text{totales}} + \underbrace{P(DN | M_2) P(M_2)}_{6/21 \cdot 1/2}$$

$$\rightarrow P(M_1 | D.N) = \frac{6/16 \cdot 1/2}{6/16 \cdot 1/2 + 6/21 \cdot 1/2} = 0.567$$

2) K mochilas con M D.A
 N D.N

$$P(D.A.k) = P(D.A.n)$$

$$\rightarrow P(D.A \text{ em } M_1) = \frac{M}{M+N} \quad 1 \rightarrow 2$$

$$P(D.A \text{ em } M_2) = \underbrace{P(D.A \text{ em } M_2 | D.A \text{ em } M_1)}_{\text{totales}} P(D.A \text{ em } M_1) + P(D.A \text{ em } M_2 | D.N \text{ em } M_1) P(D.N \text{ em } M_1)$$

2 $\rightarrow$ 3

$$\rightarrow \frac{M+1}{M+N+1} \cdot \frac{N}{M+N} + \frac{M}{M+N+1} \cdot \frac{N}{M+N}$$

$$= \frac{(M+1)N + MN}{(M+N+1)(M+N)} = \frac{M(\cancel{M+1}+N)}{(M+N)(\cancel{M+1}+N)} = \frac{M}{M+N}$$

$$\rightarrow P(\text{D.A. em } M_n) = P(\text{D.A. em } M_K)$$

P2

Pregunta 2:

Don Ennio tiene una pizzería. Asuma para esta pregunta que las pizzas tienen una masa, queso, ingredientes agregados y una salsa. Además, no importa el orden en que se agregan los ingredientes en una misma pizza (partes (a) y (c)) ni en un mismo pedazo (parte (b)).

(a) (2.0 puntos) Doña Alessia es la encargada de armar el menú de pizzas. Para ello, escoge 3 ingredientes diferentes al azar (i.e. no se repiten los ingredientes), más la salsa que también es escogida al azar. Hay 15 ingredientes agregados que poseen carne de algún tipo, mientras que los 9 ingredientes agregados restantes no contienen carne. El número de salsas es igual a un tercio de los ingredientes agregados. Asuma que solo 2 de las salsas contienen carne. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pizza que prepare doña Alessia no posea carne?

(b) (2.0 puntos) Un día ha faltado a su trabajo doña Alessia, y en su reemplazo está su amiga doña Nicoletta. Ella decide preparar pizzas de una manera diferente a la descrita en la parte anterior. Primero, Doña Nicoletta hace los cortes diametrales de tal manera que la pizza queda dividida en 12 pedazos del mismo tamaño, cada uno en forma de sección circular. Luego, doña Nicoletta incorpora **para cada pedazo por separado** 3 ingredientes (diferentes) al azar del total de los ingredientes agregados (tanto los con carne como los sin carne). Notar que cada pedazo entonces puede quedar diferente de los otros. Además, en cada pedazo, no pueden haber ingredientes repetidos, sin embargo, es posible que dos o más pedazos tengan el mismo ingrediente. Finalmente, doña Nicoletta usa siempre la misma salsa para la pizza: la salsa de tomate. Indicar el número total de pizzas diferentes que doña Nicoletta puede hacer. Al momento de contar, considerar el hecho de que la pizza es circular.

(c) (2.0 puntos) Doña Alessia ha vuelto al trabajo, y ha cambiado la forma de poner los ingredientes. En esta ocasión, ella elabora las pizzas tal como se describe en la parte (a) excepto las dos siguientes diferencias: (i) la única salsa que se usa es la salsa de tomate, (ii) puede repetir ingredientes, por ejemplo, si el total de ingredientes agregados fuese 3, entonces podría hacer una pizza con champiñones, champiñones, y cebolla; donde tendría el doble de champiñones que una pizza a la cual se le agrega champiñones una sola vez. Doña Alessia ha preparado 4 pizzas mediante el método mencionado (notar que podría darse que haya dos o más pizzas repetidas). Llega un cliente al local y se le propone la siguiente promoción: él mencionará tres ingredientes (los cuales se pueden repetir) al azar, si es que los ingredientes mencionados concuerdan exactamente con los de alguna de las pizzas elaboradas por Doña Alessia, el cliente se lleva una pizza gratis (en caso de que hayan dos o más pizzas con esos ingredientes, se lleva solo una de las pizzas). Notar que se debe considerar la cardinalidad de los ingredientes en la pizza. Por ejemplo, si el cliente dice "champiñon, champiñon, tomate" y resulta que no existe esa pizza pero sí existen las pizzas "champiñon, tomate, cebolla" y "champiñon, tomate, tomate", entonces no se lleva la pizza gratis pues a pesar de que haya acertado con los ingredientes en ambos casos, no se ha acertado con la cardinalidad de cada uno de los ingredientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga una pizza gratis?

a) 3 img. diferentes al azar + salsa
 95 img. carne
 9 " no carne
 2 salsas con carne
 6 " sin "

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{9}{1} \cdot \binom{24}{3}} = \frac{6 \cdot \frac{9!}{6!3!}}{9 \cdot \frac{24!}{21!3!}} = \frac{504}{76.192} \approx 0.03$$

$\downarrow$
 pingo
 sin carne

b) 12 pedazos
 → cada pedazo tiene 3 img. diferentes, pero pueden repetirse en otros pedazos
 → cada pedazo: $\binom{24}{3}$
 → círculo: $(12-1)!$ configuraciones
 → # total pingos: $\binom{24}{3} \cdot 11!$

c) usa 1 salsa
puede repetir ping
4 pizzas bajo este metodo

cada pizza $\rightarrow \binom{24+3-1}{3} = \binom{26}{3} = 2600$ formas de
hacer cada pizza

$X = \#$ pizzas que se hacen como dijo el cliente
 $R_X = \{0, \dots, 4\}$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \left(\frac{2599}{2600} \right)^4 \\ &\approx 1 - 0.998 \\ &\approx 0.002 \end{aligned}$$

P3

Pregunta 3

Se ha inaugurado un salón de juegos en la facultad para que la comunidad estudiantil pueda distenderse y así bajar los niveles de estrés. Para cada situación conteste las siguientes preguntas.

- (a) (1.5 puntos) En el salón hay un espacio donde usted puede jugar pool con sus amigos y amigas. Asuma que en una partida de pool usted puede ganar, empatar o perder. Usted juega 2 partidas contra su mejor amigo/a. En la primera partida usted tiene una probabilidad de perder de $1 - p$, mientras que en la segunda esta probabilidad es de $1 - q$ (los resultados de ambas partidas son independientes). Considere que, para cada partida, la probabilidad de ganar es la misma que la probabilidad de empatar. Usted recibe 3 puntos por ganar una partida, 1 por empatar, y ninguno por perder. Sea X el número de puntos que consigue luego de las 2 partidas. Calcule el rango y la PMF de X .

- (b) (1.5 puntos) En este salón también tenemos un tablero de Dardos, el cual tiene un radio de 50 cm y dos círculos concéntricos con radios de 40 cm y 20 cm. Usted recibe 50 puntos si su dardo cae en el círculo más pequeño, 25 puntos si cae en el círculo mediano y no en el círculo pequeño, 10 puntos si cae en el tablero y no en el círculo mediano, y 0 puntos si el dardo cae fuera del tablero. La probabilidad de que su dardo caiga en el tablero es de 0.3. Si el dardo cae dentro del tablero, el lugar donde cae es completamente al azar, por ende, la probabilidad de que el dardo caiga en un sector específico del tablero, será proporcional al área del sector respectivo. Sea Y el número de puntos que obtiene después de lanzar un dardo. Calcule el rango, PMF, esperanza de Y .

- (c) (1.5 puntos) Ahora usted entra en un torneo de dardos (ver parte (b) para entender los detalles), en el cual usted tiene 3 intentos de lanzamiento (el resultado de cada intento es independiente del resultado de los otros intentos). Usted ganará una recompensa si es que logra obtener una suma de 100 o más puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que gane la recompensa? No es necesario que calcule la expresión.

- (d) (1.5 puntos) Suponga ahora que el lanzamiento del dardo sigue la misma lógica descrita en la parte b), con la excepción de que ahora el dardo siempre cae dentro del tablero. (Por lo tanto la probabilidad de que el dardo caiga fuera del tablero es 0). Se desea aumentar la varianza del puntaje obtenido de un lanzamiento. Para esto, solo se permite cambiar las medidas de los dos círculos de menor tamaño (i.e., solo puede cambiar sus radios), pero no es posible cambiar la medida del círculo mayor (es decir, el tamaño del tablero no se puede cambiar). Además, no es posible cambiar las puntuaciones en cada una de las tres zonas, sin embargo, notar que al cambiar los tamaños de los radios de los círculos, se alteran las zonas asignadas a cada puntaje. Indique como proceder para lograr el objetivo descrito. La configuración propuesta debe tener tres círculos concéntricos (donde el radio de cada círculo debe ser menor o igual al tamaño del tablero. Notar que el círculo más grande debe ser igual al tamaño del tablero). No se pide el valor exacto de los radios, sino que las indicaciones de los cambios de estos en pos del objetivo mencionado. Puede entregar una respuesta con o sin cálculos, en ambos casos debe argumentar su respuesta. Notar que cuando se dice *aumentar la varianza*, es la varianza del caso con las nuevas medidas de los círculos en comparación con la varianza de las medidas de los círculos originales. En ambos casos se asume que dardo cae siempre dentro del tablero.

a) 1era : pierde con prob. $(1-p)$
 2da : " " " $(1-q)$

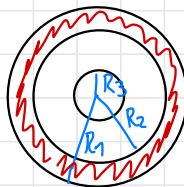
$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$PMF \rightarrow P_X(x) = \begin{cases} (1-p)(1-q) & x=0 \\ (1-p)q \cdot \frac{1}{2} + p \cdot \frac{1}{2}(1-q) & x=1 \\ p \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{1}{2} & x=2 \quad * \\ (1-p)q \cdot \frac{1}{2} + p \cdot \frac{1}{2}(1-q) & x=3 \\ p \cdot \frac{1}{2} q \cdot \frac{1}{2} + p \cdot \frac{1}{2} q \cdot \frac{1}{2} & x=4 \\ p \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{1}{2} & x=6 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

b) 50 cm $\rightarrow$ 10 pts R_1 $p(\text{tablero}) = 0.3$
 40 cm $\rightarrow$ 25 pts R_2
 20 cm $\rightarrow$ 50 pts R_3
 0 pts

$$R_Y = \{0, 10, 25, 50\}$$

$$P_Y(Y) = \begin{cases} 0.7 & Y = 0 \\ 0.3 \cdot \frac{50^2 - 40^2}{50^2} & Y = 10 \quad 0.108 \uparrow \\ 0.3 \cdot \frac{40^2 - 20^2}{50^2} & Y = 25 \quad 0.144 \downarrow \\ 0.3 \cdot \frac{20^2}{50^2} & Y = 50 \quad 0.048 \uparrow \\ 0 & \sim \end{cases}$$



$$E[Y] = 0.7 \cdot 0 + 0.108 \cdot 10 + 0.144 \cdot 25 + 0.048 \cdot 50 = 7.08$$

c) 3 intentos, 100 + pts.

$P(Y \geq 100) \rightarrow$ 3 50's
 2 50's 1 25's
 2 50's 1 10's
 2 50's 1 0's
 1 50's 2 25's

$$P(Y \geq 100) = \binom{3}{3} P_Y^3(50) + \binom{3}{2} P_Y^2(50) \binom{3}{1} P_Y(25) + \binom{3}{2} P_Y^2(50) \binom{3}{1} P_Y(10) + \binom{3}{2} P_Y^2(50) \binom{3}{1} P_Y(0) + \binom{3}{1} P_Y(50) \binom{3}{2} P_Y^2(25)$$