IN2201 : Economía

Profesora: Pamela Jervis

Auxiliares: Martín Navarrete - Sebastian Inostroza - Camila Aguillón

Clase Auxiliar XI: Decisiones Intertemporales

Modelo Consumo intertemporal

1. Explique los supuestos que tiene el modelo de consumo intertemporal.

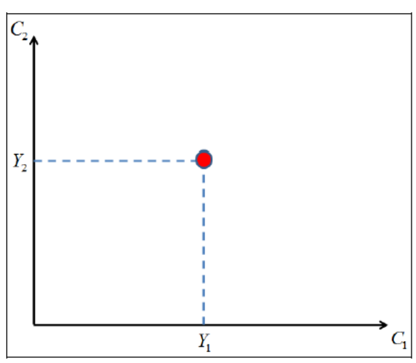
Solution:

- Al agente que vamos a estudiar es un **agente representativo, entonces sus elecciones representarán elecciones de un determinado grupo y no elecciones individuales.**
- El individuo vivira sólo dos períodos: T_1 y T_2. En cada período habrá un consumo asociado. C_1 y C_2 respectivamente.
- El agente dispone de una dotación de dinero en cada período: Y_1 y Y_2 (recordar qu el subindice denota el período).
- Precios dados.
- Agente es capaz de **revelarnos sus preferencias**, es decir nos puede decir qué canasta prefiere entre un grupo de estas.
- El individuo es racional (recordar principio del curso).
  - Preferencias completas.
  - Preferencias transitivas.

2. Muestre una expresión para la restricción presupuestaria intertemporal. Grafíque.

Solution:

Imaginemos que no hay sistema financiero que nos permita ahorrar o endeudarnos, entonces si ese es el caso **vamos a consumir** en cada período el ingreso que tenemos asignado al respectivo período, es decir, en T_1 el consumo C_1 será Y_1, y en el período dos T_2, nuestro consumo C_2, será Y_2.



Pero si asumimos que hay un sistema financiero, que nos permita ahorrar o tener deuda a una tasa de interés (la llamaremos r), entonces, nuestro agente puede ahorrar parte, o todo su ingreso Y_1 en el período T_1, y en el período T_2 tendrá un ingreso de $(1+r)Y_1+Y_2$. O también eventualmente podría endeudarse por el **valor presente** de sus ingresos futuros, es decir, tener en T_1 un ingreso de $Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)}$.

Matemáticamente, sólo debemos tener en cuenta que en T_1 nuestro ingreso Y_1 se puede destinar a consumo C_1 o ahorro S_1.

$$Y_1 = C_1 + S_1 \tag{1}$$

Por otro lado dijimos que nuestro agente vive sólo dos períodos, por lo tanto, lo que queda, en T_2 se debe consumir **todo**. Por lo tanto, el ingreso en T_2 equivale al ingreso en el período 1 más el ahorro que debemos actualizar por lo sintereses ganados.

$$C_2 = Y_2 + (1+r)S_1 \tag{2}$$

Tomando un truco matemático y despejando el ahorro de ambas ecuaciones, podemos **igualarlas y hacer una restricción temporal única**. Entonces, despejando el ahorro de la ecuació (1) y (2), tenemos que:

$$S_1 = Y_1 - C_1 \tag{3}$$

$$S_1 = \frac{C_2}{(1+r)} - \frac{Y_2}{(1+r)} \tag{4}$$

Simplemente las igualamos:

$$Y_1 - C_1 = \frac{C_2}{(1+r)} - \frac{Y_2}{(1+r)}$$

Reordenamos los ingresos en el lado izquierdo y el consumo en el lado derecho:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{(1+r)} = C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} \tag{5}$$

Tenemos una importante conclusión. La ecuación (5) nos dice que, el valor del ingreso presente, debe ser equivalente al valor del consumo presente, es decir, el individuo **nunca** aumenta o disminuye si riqueza a lo largo del tiempo. Sólo la distribuye.

Ahora para efectos matemáticos, de la ecuación 5 despejaremos C_2 en función de C_1 para poder graficarla en un plano cartesiano.

$$C_2 = (1+r)Y_1 + Y_2 - (1+r)C_1 \tag{6}$$

3. Muestre las condiciones que debe cumplir el consumo en el período cero para que los parámetros del modelo indiquen si un consumidor está ahorrando o pidiendo prestado.

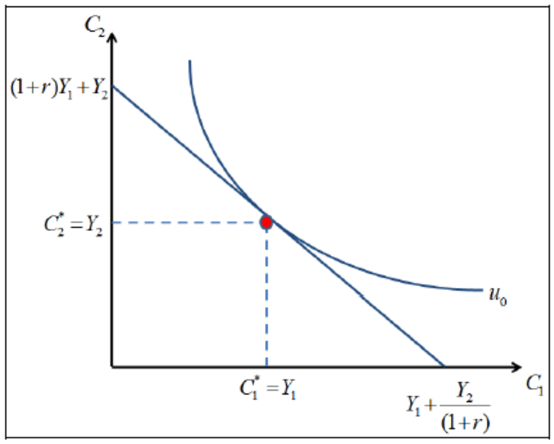
Solution:

- Cuando $Y_1 > C_1$ el signo positivo significa que estamos ahorrando.
- Cuando $Y_1 < C_1$ el signo negativo significa que nos estamos endeudando.

4. Tomando los supuestos de 1, muestre y grafíque una situación donde un consumidor elige consumo presente y consumo futuro, además indique:

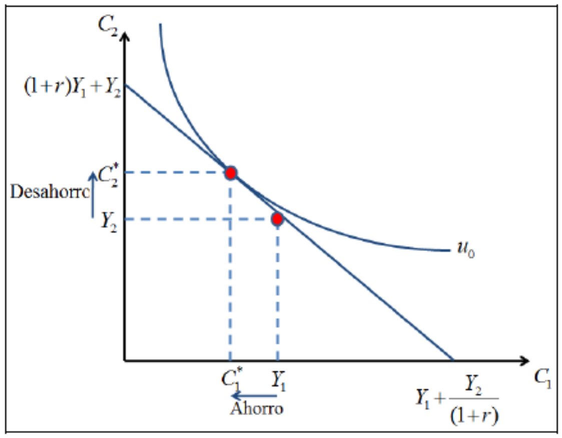
   a) Un caso donde el consumidor no tenga ahorro ni deuda.

   Solution:
   Veamos el caso cuando el equilibrio se de en la dotación inicial, es decir, donde no tenemos ahorro ni deuda. Gráficamente esto se ve:

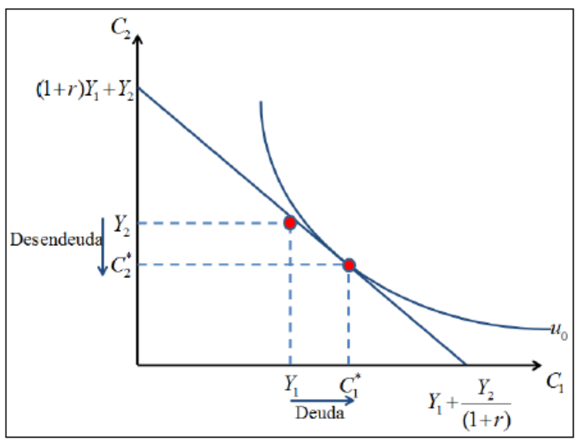
   b) Un caso donde el consumidor esté ahorrando en el primer período en el segundo desahorrando.

   Solution:
   Veamos el caso cuando el equilibrio se dé a la izquierda de la dotación inicial. Acá el individuo ahorra en el primer período y en segundo desahorra.



c) Un caso donde el consumidor se endeuda en el primer período y en el segundo pague esa deuda.

Solution:
Veamos el caso cuando el equilibrio se dé a la derecha de la dotación inicial. Acá el individuo se endeuda en el primer período y en segundo paga esa deuda.



Matemáticos

1. Un consumidor tiene un vector de ingresos (Y_0, Y_1) y puede ahorrar o pedir prestado a una tasa de interés i. Para cada uno de los períodos, tenemos datos que modelan dos situaciones. Determine si los flujos de consumo satisfacen la restricción presupuestaria intertemporal.

	(C_0, C_1)	(Y_0, Y_1)	$(1+i)$
caso (a)	(18,11)	(15,15)	1.1
caso (b)	(10,25)	(15,15)	1.8

Solution:

La restricción presupuestaria intertemporal se puede escribir de la siguiente manera (es tomar la fórmula que conocemos pero simplemente cambiar los índices de t):

$$C_0 - Y_0 \leq \frac{1}{(1+i)} (Y_1 - C_1)$$

- ¿Cuanto puede consumir como máximo el consumidor en el período cero?

$$C_0^{max} = Y_0 + \frac{1}{1+i} Y_1$$

- ¿Cuánto puede consumir como máximo el consumidor en el período 1?

$$C_1^{max} = C_0^{max}(1+i) = (1+i)Y_0 + Y_1$$

Tal como se explicó en el vídeo de la solución, si C_1 satisface la restricción intertemporal, entonces:

$$(C_1 - Y_1) \leq (1+i)(Y_0 - C_0) \Leftrightarrow C_1 \leq Y_1 + (1+i)Y_0 - (1+i)C_0 \Leftrightarrow C_1 \leq C_1^{max} - (1+i)C_0$$

Hacemos análisis por casos

- Caso 1: $(C_0, C_1) = (18, 11); (Y_0, Y_1) = (15, 15)$ y $(1+i) = 1{,}1$

$$C_1^{max} = 1{,}1 \cdot 15 + 15 = 31{,}5$$

Verificando que el nivel de consumo satisfaga la restricción de presupuesto intertemporal:

$$11 \leq 31{,}5 - 1{,}1 \cdot 18 \Leftrightarrow 11 \leq 11{,}7$$

Podemos ver que la asignación de consumo anterior **es factible.**

- Caso 2 : $(C_0, C_1) = (10, 25); (Y_0, Y_1) = (15, 15)$ y $(1+i) = 1{,}8$

$$C_1^{max} = 1{,}8 \cdot 15 + 15 = 42$$

Verificando la restricción intertemporal:

$$25 \leq 42 - 1{,}8 \cdot 10 \Leftrightarrow 25 \leq 24$$

En este caso no se cumple la restricción intertemporal, esta asignación de consumo no es factible.

2. Un consumidor tiene un vector de ingresos $(Y_0, Y_1) = (100, 50)$, y puede pedir prestado o ahorrar a una tasa de interés $i = 0{,}11$. Sus preferencias están representadas por una función de utilidad separable la cual es:

$$U(C_0, C_1) = \frac{C_0^{1-\eta}}{1-\eta} + 0{,}9 \frac{C_1^{1-\eta}}{1-\eta}$$

En este modelo asumiremos que $\eta = 2$ este parámetro comúnmente se conoce como el grado de aversión al riesgo de un invididuo (esto significa si es amante o averso al riesgo).

(a.) Define la utilidad marginal en ambos períodos.

Solution:
Lo que nos pide la pregunta es simplemente encontrar **las condiciones de primer orden**. Por lo tanto:

- Para el caso del periodo 0:

$$\frac{\partial U\left(C_0, C_1\right)}{\partial C_0} = \frac{1}{C_0^2}$$

- Para el período 1:

$$\frac{\partial U\left(C_0, C_1\right)}{\partial C_1} = 0{,}9\frac{1}{C_1^2}$$

(b.) Escriba la restricción presupuestaria intertemporal del consumidor y encuentre la condición de primer orden que denota los consumos óptimos.

Solution:
Podemos re-escribir la restricción presupuestaria intertemporal de la siguiente manera (es lo mismo que nuestra fórmula pero como mencioné en el vídeo de la solución del ejercicio 1, podemos expresarla como una inecuación para ver **todos los puntos factibles**).

$$C_0 - Y_0 \leq \frac{1}{1+i}\left(Y_1 - C_1\right) \Rightarrow C_0 - 100 \leq \frac{1}{1{,}11}\left(50 - C_1\right)$$

Podemos re-escribir lo anterior como:

$$C_0 + \frac{1}{i+i}C_1 \leq Y_0 + \frac{1}{i+i}Y_1 \Rightarrow C_0 + \frac{1}{1{,}11}C_1 \leq 145{,}04$$

Para definir el vector de consumos óptimos, debemos realizar el problemas de maximización. Por lo tanto, el consumidor resuelve:

$$\max_{(C_1, C_2)} \frac{C_0^{1-\eta}}{1-\eta} + 0{,}9\frac{C_1^{1-\eta}}{1-\eta}$$

Sujeto claramente a:

$$C_0 + \frac{1}{1{,}11}C_1 \leq 145{,}04$$

(La última restricción presupuestaria es la misma que conocemos, ustedes pueden ocupar la fórmula estándar, para efectos de este ejercicio me tomo de la inecuación, pero es exactamente lo mismo. Ahora por las propiedades de la función de utilidad, nosotros sabemos que esta restricción se cumple con igualdad).

Vamos a resolver el problema utilizando el método de Lagrande:

$$\mathcal{L}\left(C_0, C_1, \lambda\right) = \frac{C_0^{1-\eta}}{1-\eta} + 0{,}9\frac{C_1^{1-\eta}}{1-\eta} + \lambda\left(145{,}04 - C_0 - \frac{1}{1{,}11}C_1\right)$$

Encontramos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(C_0, C_1, \lambda\right)}{\partial C_0} = 0 \Rightarrow \quad C_0^{-\eta} = \frac{1}{C_0^2} = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(C_0, C_1, \lambda\right)}{\partial C_1} = 0 \Rightarrow \quad 0{,}9 * C_1^{-\eta} = 0{,}9\frac{1}{C_1^2} = \frac{1}{1{,}11}\lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(C_0, C_1, \lambda\right)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \quad C_0 + \frac{1}{1{,}11}C_1 \leq 145{,}04$$

(c.) Encuentre el vector de consumos que satisfacen la restricción presupuestaria intertemporal, que maximizan la utilidad.

Solution:
Combinando las dos primeras CPO podemos obtener que:

$$\frac{1}{C_0^2} = \frac{0{,}9 \cdot 1{,}11}{C_1^2}$$

Lo que nos queda:

$$C_1 = 0{,}999C_0$$

Dado que la restricción de presupuesto se cumple con igualdad (pueden repasar las condiciones de holgura complementaria vistas en cálculo I y II por el método de Lagrange, si no queda claro, pueden consultar a mi correo electrónico y les enseño a optimizar, sin embargo, pueden asumir que la restricción se cumple con igualdad, pero quienes deseen profundizar, podemos realizar una sesión de optimización).

La restricción presupuestaria por lo tanto queda:

$$C_0 + \frac{1}{1{,}11}C_1 = 145{,}04$$

Ordenando:

$$C_0 + 0{,}9C_0 = 145{,}04$$

Por lo tanto los consumos óptimos son:

$$C_0^\star = 76{,}34 \quad C_1^\star = 76{,}26$$

(d.) ¿Cuánto es lo máximo que puede ahorrar en $t = 0$?, y en $t = 1$?

Solution:
En $t = 0$ el consumidor puede ahorrar un monto de ingreso igual a:

$$S_0 = Y_0 - C_0 = 100 - 76{,}34 = 23{,}66$$

Si el monto anterior se presta en $t = 0$, el consumidor en $t = 1$ puede obtener :

$$\boxed{1{,}11 \cdot S_0 = 26{,}26}$$