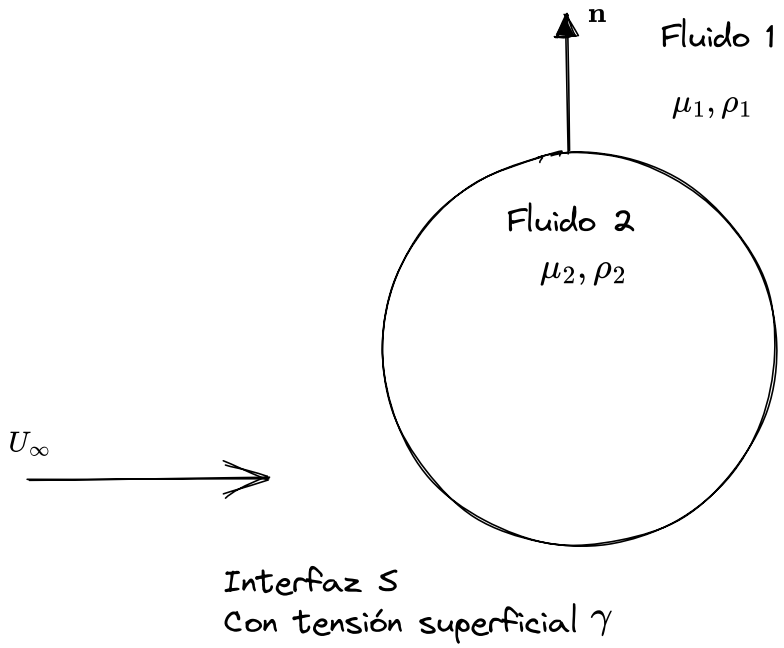
Flujo Marangoni.

Repaso Condiciones de borde en interface fluido-fluido

Repasemos las condiciones de borde en la interfaz fluido-fluido en el contexto de una burbuja o una gota.



Esencialmente en la interfaz entre dos fluidos aplicamos la condición de no deslizamiento:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$$

La condición cinemática para la interfaz nos dice que esta no es fuente ni sumidero de masa. Esto implica que la componente normal de la velocidad en ambos fluidos es igual a la velocidad de la interfaz.
La relación cinemática puede ser expresada en la forma de una relación entre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y la tasa de cambio de forma de la interfaz.

Como definimos anteriormente, la forma de la interfaz puede ser expresada como $F(\mathbf{x}, t) = 0$, donde el vector normal puede ser definido como:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

Si tomamos la derivada material encontramos:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0$$

$$\frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Para cualquier punto en S.
Si la interfaz no se está trasladando desde el origen, entonces F es independiente del tiempo y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ en la interfaz.
Cuando solo se mueve un fluido vimos que con la condición de no deslizamiento era suficiente para resolver las ecuaciones de movimiento.
Para dos fluidos no es suficiente y otra condición es necesaria, esta condición viene de hacer un equilibrio de fuerzas en la interfaz.

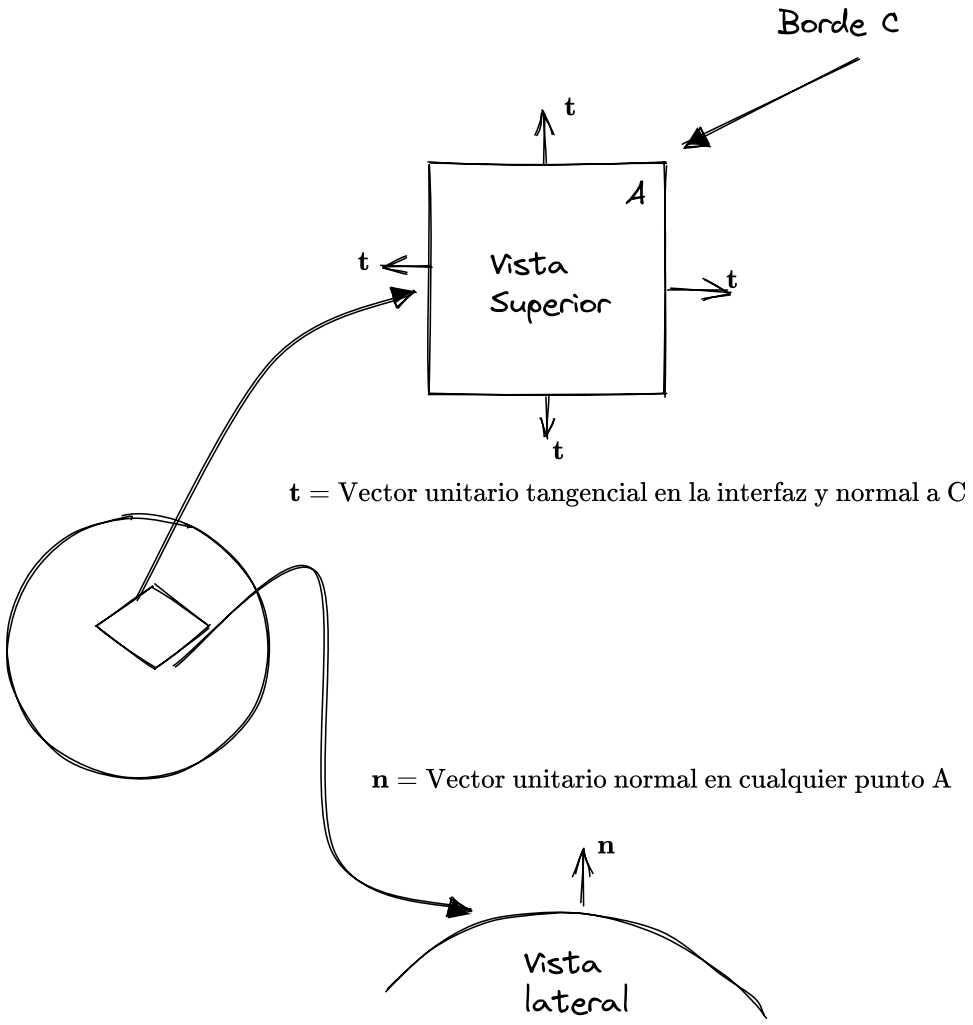
Como convención general, la forma simplificada de la interfaz es considerada con un grosor despreciable y todas las fuerzas actuando en este segmento de interfaz debe ser idénticamente cero debido a que el volumen asociado a cualquier segmento arbitrario en la interfaz es cero.

Ahora pensemos en la naturaleza de las fuerzas.

- Tenemos una presión en el volumen y stresses que actúan en las caras del elemento de interfaz y producen un efecto neto que es proporcional al área de la superficie.
- Hay una fuerza asociada a la tensión superficial que actúa en el plano de la interface al borde del elemento de superficie y es especificado por la magnitud de esta tensión superficial.

Se vio que la tensión superficial es una medida de la energía libre por unidad de área de la superficie.
Un aumento en el área de la interfaz requiere un aumento en la energía libre. Esto causa que las moléculas en la vecindad de la interfaz experimenten una fuerza neta que tiende a empujarlas hacía el volumen. Para que esta teoría macroscópica se satisfaga es necesario la existencia de la tensión superficial γ como una fuerza por unidad de largo.

Equilibrio de fuerzas.



El equilibrio de fuerzas entonces nos da la siguiente expresión:

$$\int\int_A (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dA + \int_C \gamma \mathbf{t} dl = 0$$

donde $\mathbf{T}$ es el stress total en el flujo sobre un elemento de superficie A evaluado en el límite que nos acercamos a la interfaz.
Se puede utilizar una generalización del Teorema de Stokes para demostrar que:

$$\int_C \gamma \mathbf{t} dl = \int\int_A (\nabla \gamma) dA - \int\int_A \gamma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) dA$$

Lo que combinando nos da el balance diferencial de stresses:

$$(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{n} + \nabla \gamma - \gamma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0$$

Ahora es más útil ver esto por componentes. Tomando el producto interno de esta ecuación con $\mathbf{n}$ y recordando que para un fluido Newtoniano

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \tau$$

llegamos a la siguiente expresión para la componente normal.

$$\hat{p}_{\text{total}} - p_{\text{total}} + [((\tau - \hat{\tau}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] - \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0$$

Podemos ver que la componente normal tiene una discontinuidad $\gamma(\nabla \cdot \mathbf{n})$, por lo tanto, si no hay movimiento en el fluido:

$$\hat{p}_{\text{total}} - p_{\text{total}} = \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n})$$

Esto quiere decir que para una superficie curva, la presión afuera es mayor a la presión dentro por un factor $\gamma(\nabla \cdot \mathbf{n})$.

Ahora que tenemos esto, consideremos el caso de una burbuja. Para una burbuja o una gotita, se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2\gamma}{R}$$

Estos flujos generalmente se conocen como flujos capilares.

La componente tangencial tendrá dos partes, esto se obtiene tomando el producto interno entre los vectores ortogonales tangentes que son normales a $\mathbf{n}$. Definimos los vectores como $\mathbf{t}_{1,2}$, (los los shear stress), obtenemos:

$$0 = ((\tau - \hat{\tau}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_i + (\nabla\gamma) \cdot \mathbf{t}_i$$

donde ahora el shear stress es el discontinuo en la interfaz proporcional $\nabla\gamma$. Esto es importante porque en sistemas donde $\nabla\gamma \neq 0$ **Debe haber movimiento**.

Ejemplo:

Para dos fluidos de densidades iguales con $\gamma \neq 0$ y que no se mezclen, existe un estado de equilibrio para el cual la interfaz tenga curvatura constante. La superficie más simple en este caso es una esfera. La interfaz esférica es además estable, si una gota se deforma en una elipse debido a una perturbación esta querrá volver rápidamente a su forma esférica. Por eso muchas veces la tensión superficial se resuelve para estos casos como un proceso de optimización de energía.

Por esto, por ejemplo un hilo cilíndrico infinito tiende a romperse en un largo número de gotitas. La fuente de la inestabilidad se puede ver imaginando en el cilindro como unas pequeñas ondulaciones que se alejan del cilindro de radio constante, de aquí dependiendo la la longitud de onda respecto al radio del cilindro, habrá un mecanismo de crecimiento de este comportamiento que a medida que pasa el tiempo se hace inestable.

Si la curvatura total de la superficie en cual los puntos de radio mínimo producen un máximo local en $\nabla \cdot \mathbf{n}$, entonces habrá un máximo local en la presión interna en el mismo punto, el cual empuja el fluido lejos de la región de radio mínimo hacía donde el radio

crece. Este movimiento reduce más el radio y aumenta las ondulaciones, las cuales crecen aún más en el tiempo hasta que el radio del hilo es cero y se forma una gotita.

Efecto Marangoni

La tensión superficial depende de estado termodinámico, es decir, depende de la presión y la temperatura. En este problema queremos resolver el movimiento de una gotita debido a un gradiente en su tensión superficial, pero primero resolvamos el caso de una gotita moviéndose en un fluido debido a flotabilidad.
Resolveremos este problema en el límite de bajo número de Reynolds.

Definamos como escala característica $l_c = a$ como el radio de la gota sin deformar y $u_c = U$ la velocidad de traslación de la gotita. Las ecuaciones de estos nos quedan:

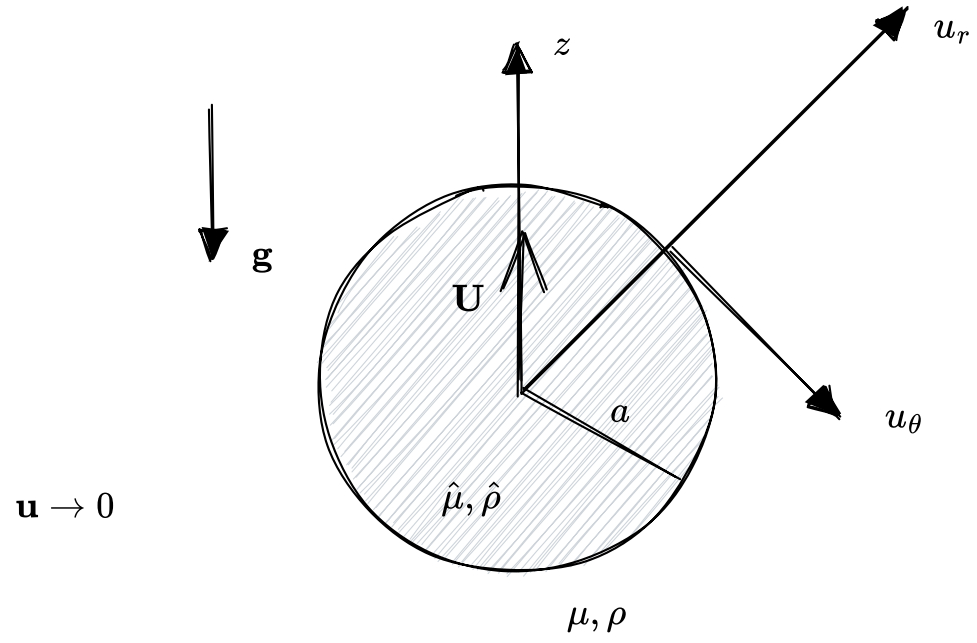
$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

y para el otro fluido.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} - \nabla \hat{p} &= 0 \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} &= 0 \end{aligned}$$

La condición de borde de campo lejano es la usual:

$$\mathbf{u} \to \mathbf{I} \cdot \hat{z} \quad |\mathbf{x}| \to \infty$$



Para resolver esto podemos usar lo aprendido para del flujo alrededor de una esfera sólida en un fluido con cierta velocidad. También se puede resolver usando una expansión en término del Stokelet y del tensor de Ossen.

Usaremos la función corriente ψ y $\hat{\psi}$, como el flujo es simétrico en el eje axial, podemos usar la expansión en términos del operador D^4, entonces se satiface:

$$D^2 D^2 \psi = D^4 \psi = 0$$

$$\hat{D}^4 \hat{\psi} = 0$$

donde $D^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial_\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$. Ambos fluidos serán descritos por la solución en coordenadas esféricas. Habíamos visto en algún auxiliar que aplicando el operador D^2 dos veces, se llega a una expresión de la forma:

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + Cr + D/r$$

La solución general será entonces:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^{n+3} + B_n r^{n+1} + C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}\right] Q_n(\cos\theta)$$

$$\hat{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{A}_n r^{n+3} + \hat{B}_n r^{n+1} + \hat{C}_n r^{2-n} + \hat{D}_n r^{-n}\right] Q_n(\cos\theta)$$

Debemos determinar entonces 8 constantes usando las condiciones de borde. Al igual que para la esfera sólida se debe cumplir que el campo lejano vaya como $r^2 Q_1$ debido a que tenemos

$$u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Por lo tanto $A_n = 0$ y $B_n = 0$ para todo n, menos $B_1 = -1$. Nos queda que ψ es

$$\psi = -r^2 Q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}\right] Q_n(\eta)$$

Adentro de la gota las componentes de la velocidad deben ser continuas en el origen por lo tanto $\hat{D}_n = \hat{C}_n = 0$. Donde definiremos $\eta = \cos\theta$. Las componentes de la velocidad nos quedan como:

$$u_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sqrt{(1-\eta^2)}}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Y la función corriente $\hat{\psi}$:

$$\hat{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{A}_n r^{n+3} + \hat{B}_n r^{n+1} \right] Q_n(\eta)$$

Nos falta determinar las constantes C_n, D_n, $\hat{A}_n$ y $\hat{B}_n$. Para esto, usaremos las condiciones de borde que definimos anteriormente y la condición cinemática. Primero definamos el número capilar, el cual es un número adimensional que mide la magnitud relativa entre las fuerzas viscosas y la tensión superficial.

$$C_a = \frac{\mu U_\infty}{\gamma}$$

Usaremos el factor $\mu U_\infty / a$ para normalizar la presión. Nos queda entonces:

$$\begin{aligned} u_\theta = \hat{u}_\theta \ \text{ cuando } \ r = 1 \\ u_r = \hat{u}_r = 0 \ \text{ cuando } \ r = 1 \\ e_{r\theta} = \lambda \hat{e}_{r\theta} \ \text{ cuando } \ r = 1 \\ \hat{p} - p + (e_{rr} - \lambda \hat{e}_{rr}) = \frac{2}{C_a} \ \text{cuando } \ r = 1 \end{aligned}$$

Aquí e_{ij} es la tasa de strain y $\lambda = \hat{\mu}/\mu$. Reconocemos que las primeras dos vienen de la continuidad de la velocidad, y las últimas dos son la componente normal y tangencial del stress, bueno en verdad es una combinación de estas condiciones. La última está asumiendo que la forma de la gota es conocida, podemos no usar esta condición porque generalmente no conocemos la forma de la gota, aún así tenemos 4 condiciones de borde, ya que la segunda ecuación en verdad son dos.

Encontremos las constantes:

- $r = 1$

$$u_r = \hat{u}_r = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}$$

$$-r^2 Q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n (1)^{2-n} + D_n (1)^{-n} \right] Q_n(\eta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{A}_n 1^{n+3} + \hat{B}_n 1^{n+1} \right] Q_n(\eta)$$

  Que se satisface para $n = 1$ y para $n > 2$ las constantes se hacen cero. Repitiendo esto para las demás condiciones y recordando que:

$$e_{r\theta} = \left(\frac{1}{r} \partial_\theta v_r + \partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r} \right)$$

  Encontramos que:

$$C_1 = \frac{3\lambda + 2}{2\lambda + 2}$$

$$D_1 = \frac{-\lambda}{2(\lambda + 1)}$$

$$\hat{A}_1 = -\hat{B}_1 = \frac{1}{2\lambda + 1}$$

Luego la función corriente:

$$\psi = -Q_1 \left[r^2 - \frac{3\lambda + 2}{2\lambda + 2} r + \frac{\lambda}{2\lambda + 2} \frac{1}{r} \right]$$

$$\hat{\psi} = \frac{Q_1}{2} \left[\frac{r^2 - r^4}{\lambda + 1} \right]$$

Luego el drag en la dirección z será la integral sobre el tensor de esfuerzos en la dirección normal.

$$F_z = 4\pi\mu C_1 U = 4\pi\mu U \frac{3\lambda + 2}{2\lambda + 2}$$

La cual en el límite de $\lambda \to \infty$ recupera el valor conocido para una esfera sólida $F = 6\pi\mu a U$. Luego los campos de velocidades se pueden encontrar con la función corriente.
Cuando $\lambda \to 0$, $F = 4\pi\mu a U$ lo cual es el arrastre sobre una burbuja.

Ahora consideremos el caso cuando existe un gradiente de tensión superficial. Esto se conoce como Efecto Marangoni y para este caso particular produce una propulsión de la gotita.
Impongamos un gradiente de temperatura actuando sobre la gotita, la temperatura decae como $T(z) = T_\infty(0) - \alpha z$, donde $T(0)$ es un valor de referencia a $z = 0$.
No resolveremos la ecuación de Laplace para la temperatura en la superficie de la gota, si no que simplificaremos el problema usando las herramientas anteriores.

Las condiciones de borde en este caso cambian respecto al problema anterior para los esfuerzos, por lo tanto tenemos:

$$\tau_{r\theta} + \frac{1}{\mu U} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0$$

cuando $r = 1$. Este es el balance tangencial del stress adimensional. Para calcular la derivada de la tensión superficial respecto al ángulo usaremos la expresión de la temperatura en coord esféricas, con el hecho de que la tensión superficial disminuye cuando la temperatura aumenta.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -\beta < 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\partial \gamma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \theta} = \beta\alpha \sin\theta = \alpha\beta\sqrt{1-\eta^2}$$

recordando que $\eta = \cos\theta$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\alpha\beta(1-\eta^2)^{1/2}}{\mu U} \quad r = 1$$

Y sabemos que la función corriente va como:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^{n+3} + B_n r^{n+1} + C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}\right] Q_n(\cos\theta)$$

Cuando r se va a infinito:

$$\psi = -r^2 Q_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n r^{2-n} + D_n r^{-n}\right] Q_n(\eta)$$

Aplicamos el resto de las condiciones de borde $u_r = 0$ en la superficie.

$$0 = -Q_1(\eta) + \sum_{n=1}(C_n + D_n) Q_n(\eta)$$

La segunda condición $\tau_{r\theta} = \frac{\alpha\beta(1-\eta^2)^{1/2}}{\mu U} \quad r = 1$

$$r\frac{\partial}{\partial_r}(\frac{u_\theta}{r}) = -\frac{\alpha\beta}{\mu U}\sqrt{1-\eta^2}$$

donde

$$u_\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Luego:

$$-2Q_1 + 2C_1 Q_1 - 4D_1 Q_1 + \sum[(2-n)(n+1)C_n - n(n+3)D_n]Q_n = \frac{2\alpha\beta}{\mu U}Q_1$$

Resolviendo encontramos que $C_n = D_n = 0$ para $n \geq 2$:

$$C_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{3\mu U}$$

$$D_1 = \frac{\alpha\beta}{3\mu U}$$

Entonces el drag en este caso es:

$$F = 4\pi\mu a U \left[1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha\beta}{\mu U}\right]$$

La cual es mayor que cuando no hay un gradiente de temperatura. Esto es debido a la contribución al esfuerzo en la superficie de la gotita. Como consecuencia, la gotita se moverá más lento cuando por ejemplo está sedimentando.

La velocidad límite se puede encontrar con equilibrio de fuerzas:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g = 4\pi\mu a U \left[1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha\beta}{\mu U}\right]$$

$$U = \frac{1}{3}\frac{a^2\rho g}{\mu}\left(\frac{a^2\rho g - \alpha\beta}{a^2\rho g}\right)$$

Por lo que existe un valor crítico para α el cual hará que la gota no sedimente debido a este gradiente de temperatura :o.

Acústica y Sonido.

Cuando tenemos pequeñas perturbaciones en la densidad de un fluido ideal se producen ondas de sonido que son descritas por la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Euler.
Usando el Método de modos normales se linealizan las ecuaciones respecto a las perturbaciones $p' \ll p_0$ y $\rho' \ll \rho$, tal que:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0$$

Como es un sistema cerrado, debemos especificar una relación entre las perturbaciones de la presión y densidad, para eso necesitamos definir una ecuación de estado. Se introduce la relación $p' = c^2\rho'$ y como sabemos que pequeñas perturbaciones son potenciales podemos escribir $\mathbf{v} = \nabla\phi$ para obtener:

$$\phi_{tt} - c^2\nabla^2\phi = 0$$

Una Ecuación de onda y reconocemos que c es la velocidad del sonido.
Sabemos que la solución general de la ecuación de onda es:

$$\phi = \frac{1}{r}[f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]$$

La densidad de energía de las ondas de sonido E_w puede obtenerse de expandir $\rho E + \rho v^2/2$ hasta el segundo orden en las perturbaciones.

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}$$

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho_0}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial_t}\right)^2$$

se puede demostrar que el flujo de energía va como:

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v}(H + v^2/2) \approx H' \rho_0 \mathbf{v} + H_0 \rho' \mathbf{v} = p' \mathbf{v}$$

donde $H = p' \partial_p H$ es la variación de entalpía.
Radiación acústica desde una esfera pulsante

Vimos en un auxiliar que una esfera de radio variable $R(t)$ tiene un potencial de velocidades:

$$\phi = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} + \phi_\infty$$

y una velocidad:

$$v_r = \frac{R^2}{r^2}\dot{R}$$

Usando la ecuación de Bernoulli podemos encontrar que la diferencia de presión producida es:

$$p - p_\infty = \frac{\rho}{r}[R^2 \ddot{R} + 2R\dot{R}^2] + \frac{R^2 \dot{R}}{2r^2}$$

Entonces el flujo de energía es directo de calcular cuando se especifica $R(t)$.
La energía y el flujo están relacionados por la expresión:

$$\frac{\partial E_w}{\partial t} + \nabla p' \mathbf{v} = 0$$