Condiciones de borde entre líquidos

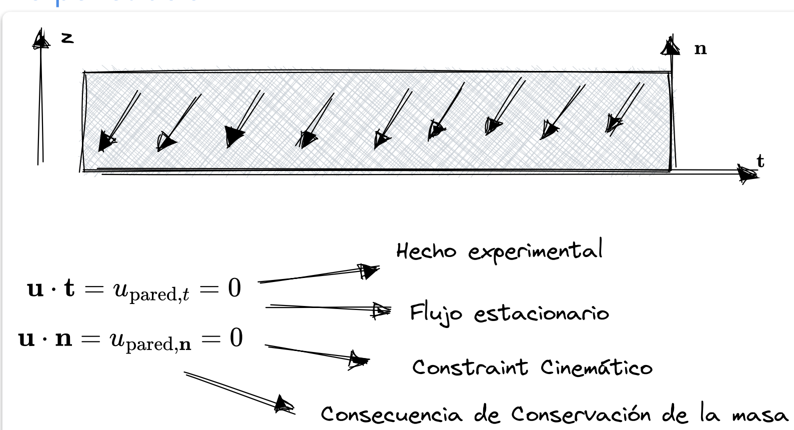
Asumamos que tenemos una interfaz gas-liquido. En la interfaz habrá una discontinuidad en la densidad, por lo que la función densidad no está definida en la interfaz. La prescripción principal que tomaremos es que la interfaz no tiene masa, es decir, no habrá mezclas, reacciones químicas o adsorbancia de moléculas en la interfaz.
Una ecuación que describe una superficie es de la forma:

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

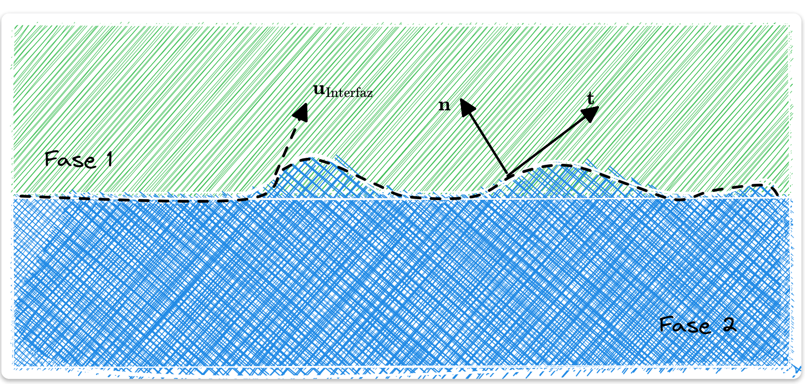
Que se puede escribir de forma implícita como

$$F = F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - f(x_1, x_2)$$

A diferencia de bordes rígidos, donde las condiciones son:

- No deslizamiento
- No penetración
- 

  En el caso donde hay dos fases, la interfaz se mueve con una velocidad $\mathbf{u}^I$.



Las condiciones son:

$$\left[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}^I)\cdot\mathbf{n}\right]_1 = \left[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}^I)\cdot\mathbf{n}\right]_2$$

Si no hay cambio de fase en la interfaz, es decir no hay flujo de masa entre los fluidos, tenemos que:

$$\rho_1(\mathbf{u_1}-\mathbf{u}^I)\cdot\mathbf{n}=0$$

$$\rho_2(\mathbf{u_2}-\mathbf{u}^I)\cdot\mathbf{n}=0$$

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}=\mathbf{u}^I\cdot\mathbf{n}$$

$$\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}=\mathbf{u}^I\cdot\mathbf{n}$$

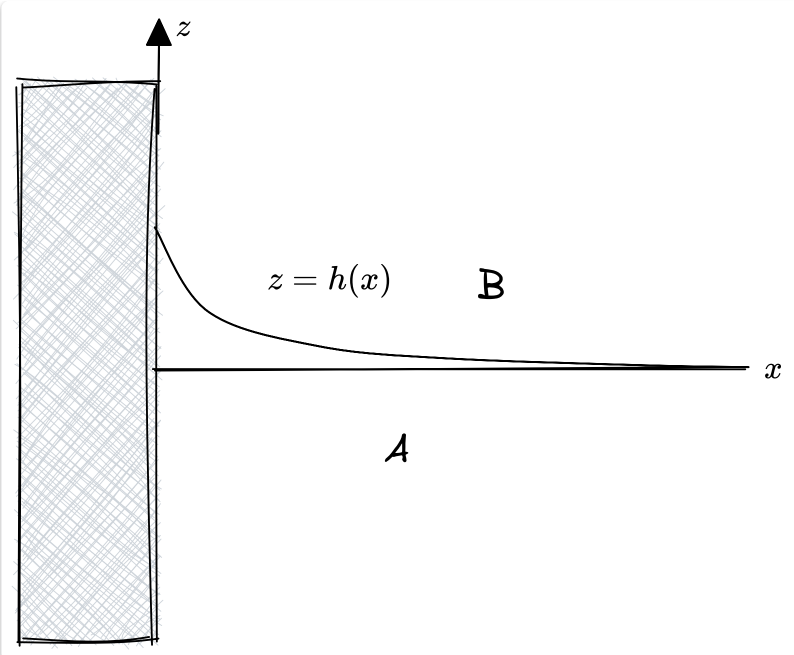
La velocidad normal es continua.

Podemos escribir las propiedades importantes para las condiciones de borde en las distintas coordenadas como:

Coordenadas	x, y, z	r, θ, z	r, θ, z	r, θ, ϕ
Interfaz	$z = h(x,t)$	$r = R(z,t)$	$z = h(r,t)$	$r = R(t)$
Vector normal x	$n_x = -n_z\frac{\partial h}{\partial x}$	$n_r = [1+(\frac{\partial R}{\partial z})^2]^{-1/2}$	$n_r = -n_r\frac{\partial h}{\partial r}$	$n_r = 1$
Vector normal z	$n_z = [1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2]^{-1/2}$	$n_r = -n_r\frac{\partial h}{\partial r}$	$n_r = [1+(\frac{\partial R}{\partial z})^2]^{1/2}$	$n_\theta = 0$
Velocidad interfaz	$n_z\frac{\partial h}{\partial t}$	$n_r\frac{\partial R}{\partial t}$	$n_z\frac{\partial h}{\partial t}$	$\frac{dR}{dt}$

Efectos tensión superficial

Consideremos una interfaz gas-liquido horizontal semi infinita que está en contacto con una pared vertical en $x=0$. La altura de la interfaz será $h=h(x)$ con $h=h'=0$ cuando $x\to\infty$. Como se muestra en la figura



Usaremos la Ecuación de Young-Laplace:

$$p_A - p_B = -2\sigma\mathcal{H} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

donde $\mathcal{H}$ es la curvatura y σ es la tensión superficial. La presión en el liquido en la dirección $x = 0$ es la caída de presión hidroestática $\rho g h$ menos el salto en la presión causado por el menisco curvo.

$$\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \rho g h(x) = 0$$

El radio de curvatura es $1/R_1 = 0$ porque solo consideramos la parte superior.

$$\frac{1}{R_2} = -\nabla \cdot \mathbf{n} = n_z^3 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -h''(1 + h'^2)^{-3/2}$$

por lo tanto:

$$\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} = \frac{\rho g h}{\sigma}$$

La otra condición de borde es $h'(0) = -\cot\theta$, donde θ es el ángulo de contacto en $x = 0$.

Si introducimos la longitud capilar $\sqrt{\sigma/\rho g}$ podemos definir las variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{\sqrt{\sigma/\rho g}}$$

$$H = h/\sqrt{\sigma/\rho g}$$

Y la ecuación diferencial nos queda.

$$\frac{H''}{(1+H'^2)^{3/2}} - H = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 1 + H'^2$, $du = 2H'dH' = 2H'H''dX$, tenemos:

$$\frac{H''2H'dX}{u^{3/2}} - H2H'dX = 0$$

$$\frac{du}{u^{3/2}} = 2HdH$$

Integramos y obtenemos

$$u^{-1/2} + \frac{H^2}{2} = C$$

donde C es una constante a determinar con las condiciones iniciales.

$$\frac{1}{\sqrt{1+H'^2}} + \frac{H^2}{2} = C$$

Con $H = H' = 0$ cuando $X \to \infty$, nos da que $C = 1$.
Con la condición de borde para el ángulo inicial, sea $h'(0) = H_0$.

$$\frac{1}{\sqrt{1/\sin\theta^2}} + \frac{H_0}{2} = 1$$

$$H_0 = \sqrt{2 - 2\sin\theta}$$

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1-\sin\theta)}$$

Ahora se podría resolver la ecuación para H' y encontrar la relación entra $H(X)$.

Análisis de estabilidad lineal

sea x^* un punto fijo del sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$
Este punto será estable o inestable si:

$$x(t) = x^* + \eta$$

donde:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x^* + \eta)$$

Expandimos en Taylor:

$$f(x^*+\eta) = f(x^*) + f'(x^*)\eta + \frac{f''(x^*)}{2}\eta^2 + \dots$$

luego:

$$\eta(t) = \eta_0 e^{f'(x^*)t}$$

y se cumple que si $f'(x^*) > 0$ es inestable y es estable para $f'(x^*) < 0$ y si $f'(x^*) = 0$ no podemos decir mucho con análisis de estabilidad lineal. Observemos que las unidades de $f'(x^*)$ son un inverso de tiempo, por lo tanto el inverso de $f'(x^*)$ es la escala de tiempo característica de decaimiento o crecimiento de la perturbación.

Método de modos normales

Una perturbación de modo normal es una onda viajando con una amplitud que depende de una posición.
Sabemos que para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Si conocemos las condiciones iniciales $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$, podemos resolver este problema.
Por ejemplo, podemos usar el método de expansión de autofunciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda \mathbf{u}_i$$

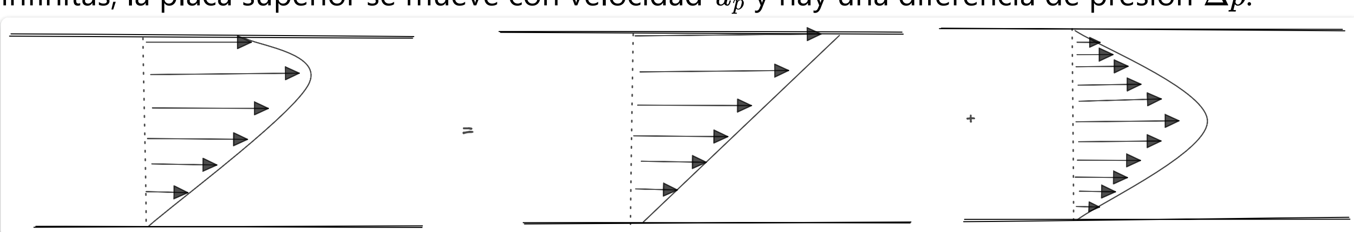
donde podemos expandir tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} C_i(t=0) e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i = \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t}$$

El problema es que para un fluido establecer una condición inicial no es posible en la mayoría de los casos, entonces los coeficientes C_i no son conocidos. Sin embargo, conociendo los autovalores λ_i, del Análisis de estabilidad lineal sabemos que si al menos uno de los autovalores es positivo, el sistema se considera inestable (para condiciones iniciales arbitrarias). Si todos los autovalores son negativos, el sistema se considera estable de manera asintótica.

Ejemplo: flujo de Couette + flujo de Poiseuille

Consideremos estos flujos combinados, es decir, un flujo dos dimensional entre dos placas infinitas, la placa superior se mueve con velocidad u_p y hay una diferencia de presión Δp.



Definiremos el estado base como la solución a este problema cuando está totalmente desarrollado, es decir, $v_x = v_x(z); v_y = 0; v_z = 0$.
Si $z = b \to u = u_p$ y $z = -b \to u = 0$. El perfil de velocidad viene dado por:

$$u_x = \frac{\Delta P}{2\eta}(z^2 - b^2) + \frac{u_p}{2}\frac{b+z}{b}$$

Este es el estado base el cual hará un tipo de equivalencia con el punto fijo, entonces la velocidad por componentes es:

$$v_x(x,y,z,t) = \underbrace{u_x(z)}_{\text{estado base}} + \underbrace{u'_x(x,y,z,t)}_{\text{perturbación}}$$

$$v_y(x,y,z,t) = \underbrace{u'_y(x,y,z,t)}_{\text{perturbación}}$$

$$v_z(x,y,z,t) = \underbrace{u'_z(x,y,z,t)}_{\text{perturbación}}$$

La presión será $p = P + p'$. Ahora escribamos la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z &= 0 \\ \partial_x u_x + \partial_x u'_x + \partial_y u'_y + \partial_z u'_z &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \end{aligned}$$

El campo de velocidades que genera las perturbaciones también es incompresible. Ahora escribimos las componentes del momentum:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{no lineal}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

Luego de escribirlas en término del estado base y la perturbación tenemos, para la coordenada x:

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial u'_x}{\partial t} + \underbrace{u_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_z \frac{\partial u_x}{\partial z}}_{\text{no lineal-acoplamiento-estado base-fluctuaciones}}\right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \nabla^2 u'_x \\ \rho\left(\frac{\partial u'_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_y}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \eta \nabla^2 u'_y \\ \rho\left(\frac{\partial u'_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u'_z}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \eta \nabla^2 u'_z \end{aligned}$$

Tenemos entonces 3 ecuaciones diferenciales parciales acopladas y condiciones de borde homogéneas y si especificamos las perturbaciones en $t = 0$ podemos resolver este problema.

Como no tenemos conocimiento de las condiciones iniciales, usaremos el método de modos normales para predecir la estabilidad.
Observamos que los términos que envuelven productos de las perturbaciones se descartan ya que podemos decir que son de orden ϵ^2 ..

Usaremos la Transformada de Fourier, ya que el dominio en el plano es infinito.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} dx$$

La coordenada z es la coordenada que está confinada, donde haremos una expansión en autofunciones, tenemos:

$$v_x(x,y,z,t) = \underbrace{u_x(z)}_{\text{estado base}} + \underbrace{u'_x(x,y,z,t)}_{\text{perturbación}}$$

donde la perturbación la expandiremos tal que:

$$A(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y B_n(k_x,k_y,t) \Phi^n(k,z) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

podemos escribir $B_n(k_x,k_y,t) = \tilde{B}(k_x,k_y)e^{st}$, donde s corresponde a los autovalores. Sabemos que en una forma típica de A será como:

$$A(x,y,z,t) \approx \Phi^n(z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{st}$$

donde $s = s_r + is_i$ es la tasa de crecimiento, si $s_r > 0$ es inestable y si $s_i < 0$ decimos que es asintóticamente estable. Podemos ver que con este análisis no resolvemos el problema de valor inicial, si no que resolvemos un problema de autovalores.

Modelo de juguete 1

Consideremos un flujo base en la dirección x que es paralelo y depende solo de la coordenada y, $V_i = (V_x(y), 0, 0)$. La perturbación en modo normal será entonces:

$$v'_i = \hat{v}_i(y) \exp[i(k_x x + k_z z - k_x ct)]$$

donde $\hat{v}_i$ es una amplitud compleja, $k_{x,z}$ son los números de onda y c es ña velocidad de la onda compleja. El número de onda tiene magnitud $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. Separaremos la velocidad de la onda en su parte real e imaginaria $c = c_R + ic_I$, por lo tanto:

$$v'_i = \hat{v}_i(y) \exp[i(k_x x + k_z z - k_x c_R t)] e^{k_x c_I t}$$

Esto nos entrega información de la velocidad c. A un punto fijo en el flujo la perturbación oscila con una frecuencia $\omega = 2\pi f = k_x c_R$.

$$c_I < 0: \text{ flujo es estable}$$

$$c_I > 0: \text{ flujo es inestable}$$

$$c_I = 0: \text{ flujo es neutralmente estable}$$

Modelo de juguete 2

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\partial_t f = f - \underbrace{f^2}_{\text{Término no lineal}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{Parámetro de control}} \partial_y^2 f$$

$$\partial_t f = f - f^2 + \frac{1}{\lambda}\partial_y^2 f$$

con condiciones de borde: $f(y=0) = f(y=1) = 0$. Y un estado base F estacionario y espacialmente uniforme.

Paso 1: Agregar perturbación

$$f(y,t) = F + \delta f'(y,t)$$

Paso 2: Resolver para el estado base F.

$$F - F^2 + \frac{1}{\lambda}\frac{d^2F}{dF^2} = 0$$

$$F - F^2 = 0 = F(F - F)$$

Luego $F = 0$ y $F = 1$. Donde solo $F = 0$ satisface las condiciones de borde.

Paso 3: Linealizar y encontrar ecuaciones para f'

$$\partial_t(F + \delta f') = (F + \delta f') - (F + \delta f')^2 + \frac{1}{\lambda}\partial_y^2(F + \delta f')$$

$$\delta\partial_t f' = \delta f' - \delta^2 f'^2 + \frac{\delta}{\lambda}\partial_y^2 f'$$

Observamos que el término no lineal es de orden δ^2, por lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$\partial_t f' = f' + \frac{1}{\lambda}\partial_y^2 f'$$

Paso 4: Resolver con el método de modos normales

El modo normal para la perturbación será $f'(y,t) = \hat{f}(y)e^{st}$. En la ecuación:

$$\hat{f}(y)se^{st} = \hat{f}(y)e^{st} + \frac{1}{\lambda}e^{st}\frac{d^2\hat{f}}{dy^2}$$

$$s\hat{f} = \hat{f} + \frac{1}{\lambda}\frac{d^2\hat{f}}{dy^2}$$

con la condiciones de borde: $\hat{f}(y=0) = 0 = \hat{f}(y=1)$. s es el autovalor que queremos analizar y $\hat{f}$ es el autovalor. Por las condiciones de bordes, podemos ver que la autofución debe ser tipo proporcional a la función $\sin$, tal que:

$$\hat{f} = C\sin(n\pi y), \quad n = 1, 2, 3, ..$$

Reemplazamos entonces:

$$sc\sin(n\pi y) = c\sin(n\pi y) + \frac{1}{\lambda}C(-n^2\pi^2\sin(n\pi y))$$

simplificamos y encontramos que:

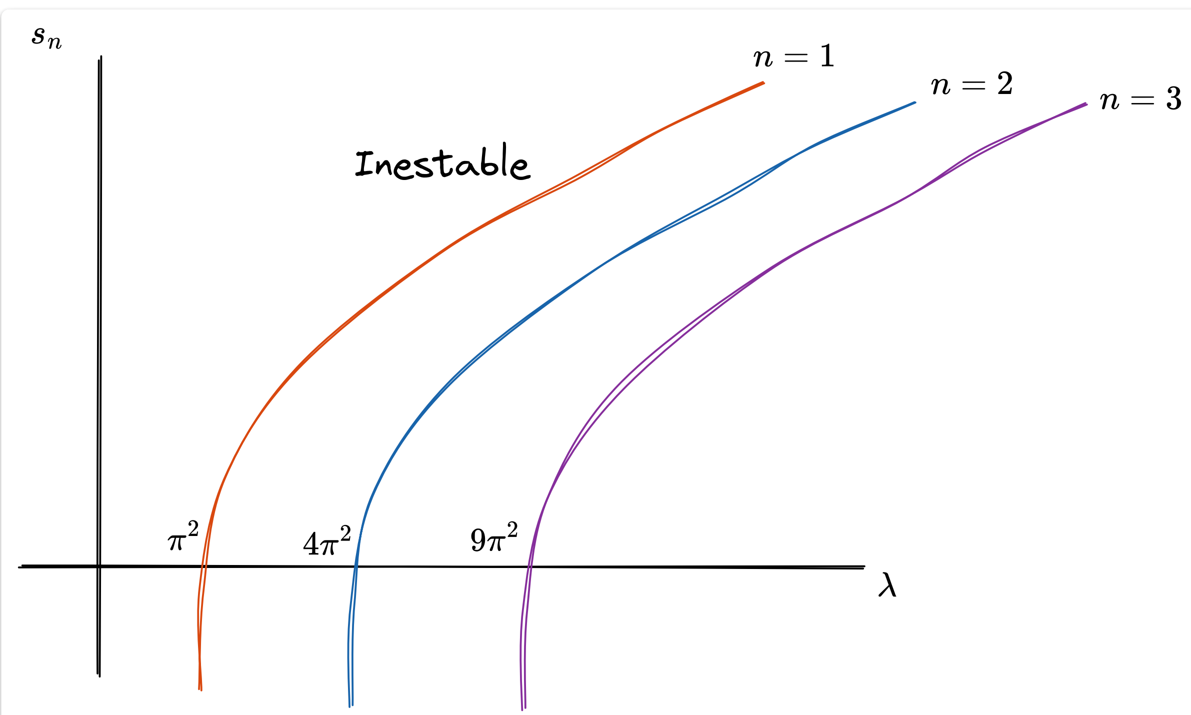
$$s_n = 1 - \frac{n^2\pi^2}{\lambda}$$

Ahora nos preguntamos sobre la estabilidad de s. Podemos analizar el gráfico de estabilidad de s en función del parámetro de control λ.

$$\text{Estable:} s < 0 \ \text{ para } \ \lambda < n^2\pi^2$$

$$\text{Instable:} s > 0 \ \text{ para } \ \lambda > n^2\pi^2$$

$$\text{Neutral:} s = 0 \ \text{ para } \ \lambda = n^2\pi^2$$



Para $\lambda = \lambda_c = \pi^2$ es cuando este modelo es más inestable y es conocido como el parámetro crítico. Para $\lambda < \lambda_c$ todos los autovalores son estables. Por lo tanto el modo más inestable será:

$$\hat{f}(y,t) = c\sin(\pi y)e^{(1-\pi^2/\lambda)t}$$

que corresponderá a la estructura espacial más inestable que uno vería en el experimento.