FI2001-6: Mecánica
Profesor: Claudio Romero Z.
Auxiliar: Jerónimo Herrera G., Rodrigo Catalán B.

Pauta Auxiliar Extra C2 #2

1. *a*) El potencial efectivo es la suma del potencial $V(r)$ con la barrera centrífuga $B(r)$:

$$V_{ef}(r) = -\frac{C}{3r^3} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Lo derivamos e igualamos a 0 para encontrar el máximo:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = \frac{C}{r^4} - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{mC}{l^2}$$

Evaluamos en el potencial efectivo para obtener su valor máximo:

$$V_0 = V_{ef}(r_0) = -\frac{C}{3(\frac{mC}{l^2})^3} + \frac{l^2}{2m(\frac{mC}{l^2})^2} = -\frac{l^6}{3m^3C^2} + \frac{l^6}{2m^3C^2}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{l^6}{6m^3C^2}}$$

b) Para graficar el potencial efectivo debemos considerar:

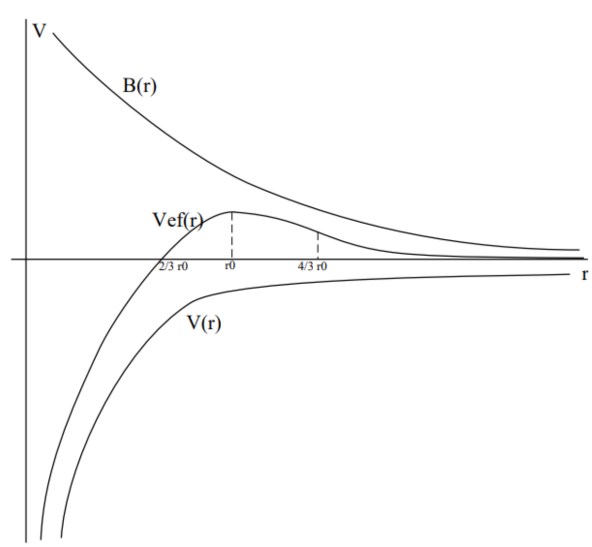
- Ceros de $V_{ef}(r)$: un único cero

$$V_{ef} = 0 = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} \Rightarrow r(V_{ef} = 0) = \frac{2mC}{3l^2} = \frac{2}{3}r_0$$

- $r \to \infty$: vemos que el término negativo será más pequeño que el positivo, debido a su dependencia radial. Con lo que $V_{ef}(r \to \infty) \to 0^+$, es decir, tiende a cero por sobre el eje r.
- $r \to 0$: al revés, el término negativo se hace más grande que el positivo, $V_{ef}(r \to 0) \to -\infty$
- *Si se quiere:* punto de inflexión.

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} = \frac{3l^2}{mr^4} - \frac{4C}{r^5} = 0 \Rightarrow r_{inf} = \frac{4mC}{3l^2} = \frac{4}{3}r_0$$

Graficamos:



c) Estudiamos el caso crítico $E = V_0$, el cual nos dará el máximo valor del momentum angular l_c. Como el potencial (y la fuerza) es central, se conserva la energía. Escribimos la energía inicial:

$$E_i = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Donde el segundo y tercer término se anulan, ya que $r \to \infty$. Por otro lado, la energía justo cuando la partícula está en r_0 y $E = V_0$, $\dot{r} = 0$. Escribimos la energía final en ese punto:

$$E_f = \frac{l^2}{2mr_0^2} - \frac{C}{3r_0^3} = V_0 = \frac{l^6}{6m^3C^2}$$

Igualando la energía inicial con la final, obtenemos el valor crítico l_c:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{l^6}{6m^3C^2} \Rightarrow \boxed{l_c = (3v_0^2m^4C^2)^{\frac{1}{6}}}$$

2. a) Usamos coordenadas polares, con $r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\dot{\phi} = \omega$, $\ddot{\phi} = 0$. La 2da Ley de Newton queda:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

La componente angular se anula, quedando sólo la radial. Reemplazando los valores de r y $\dot{\phi}$:

$$-\frac{GMm}{R^2} = -mR\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

Relacionamos frecuencia angular orbital con periodo orbital:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Hasta acá está bien. Elevando al cuadrado y reordenando, llegamos a la 3ra Ley de Kepler:

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

<u>Observación:</u> si fuese una órbita elíptica $R \to a$ (semieje mayor).

b) Considerando el camino radial como una elipse muy delgada, se tiene que la velocidad angular es despreciable, $v_\phi \approx 0$. Ahora, usamos coordenadas polares, considerando $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ y r variable.

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$$

Integramos usando el truco de la 2da derivada, considerando las siguientes CI: $r(0) = R$, $\dot{r}(0) = 0$

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \int_0^{\dot{r}} \dot{r}d\dot{r} = \int_R^r -\frac{GM}{r^2}dr \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

Despejamos la velocidad radial, sabiendo que como el planeta se acerca al Sol, $\dot{r} < 0$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}$$

Integramos la ecuación separable, considerando un tiempo de caída t_S tal que $r(t_S) = R_S$:

$$\int_R^{R_S} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} dr = -\sqrt{2GM} t_S \Rightarrow t_S = -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_R^{R_S} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} dr$$

Hasta aquí se podría discutir que se tiene resuelto el problema. No obstante, dados los *hints* apropiados, es viable hacer la resolución de la integral. Comenzamos asumiendo un caso indefinido:

$$r = Ru \Rightarrow dr = Rdu \Rightarrow \int \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{Ru} - \frac{1}{R}}} du = R^{3/2} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u} - 1}} du$$

$$\frac{1}{u} = \csc^2\theta \Rightarrow u = \text{sen}^2\theta \Rightarrow du = 2\text{sen}\theta\cos\theta \quad ; \quad \frac{1}{u} - 1 = \csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta$$

$$2R^{3/2} \int \frac{1}{\cot\theta} \text{sen}\theta\cos\theta d\theta = 2R^{3/2} \int \text{sen}^2\theta d\theta = 2R^{3/2} \int \frac{1 - \cos\theta}{2} d\theta = R^{3/2}(\theta - \frac{1}{2}\text{sen}2\theta)$$

Volviendo a la variable original: $\theta = \text{arcsen}\sqrt{u} = \text{arcsen}\sqrt{\frac{r}{R}}$, $\text{sen}(2\text{arcsen}x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

$$R^{3/2}\left(\text{arcsen}\sqrt{\frac{r}{R}} - \frac{1}{2}\text{sen}\left(2\text{arcsen}\sqrt{\frac{r}{R}}\right)\right) = R^{3/2}\left(\text{arcsen}\sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}\right)$$

Evaluando en los límites de integración, encontramos el tiempo de caída:

$$t_S = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\text{arcsen}\sqrt{\frac{r}{R}} - \sqrt{\frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}\right)\Bigg|_R^{R_S}$$

$$t_S = -\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left[\text{arcsen}\sqrt{\frac{R_S}{R}} - \text{arcsen}(1) - \left(\sqrt{\frac{R_S}{R}\left(1 - \frac{R_S}{R}\right)} - 0\right)\right]$$

$$\boxed{t_S = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\sqrt{\frac{R_S}{R}} + \sqrt{\frac{R_S}{R}\left(1 - \frac{R_S}{R}\right)}\right]}$$

3. *a*) Como la barra rota en torno a un **punto fijo**, y la fuerza de roce no hace trabajo (ya que no hay desplazamiento del punto de contacto previo al deslizamiento), podemos usar la conservación de la energía. Escribimos la energía mecánica para este sistema, al instante inicial y luego de un desplazamiento angular θ, recordando que el centro de masa de la barra se encuentra en su mitad:

$$E_i = \frac{MgL}{2} \quad ; \quad K_i = 0 \quad , \quad E_i = U_i = Mgh_{cm}^i \quad ; \quad h_{cm}^i = \frac{L}{2}$$

$$E_f = \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 + \frac{MgL}{2}\cos\theta \quad ; \quad h_{cm}^f = \frac{L}{2}\cos\theta$$

Notamos que como el eje de giro está desplazado en $L/2$ con respecto al centro de masa de la barra y es paralelo a éste, debemos usar el teorema de Steiner para obtener I_P. Consideraremos conocido el momento de inercia de una barra uniforme con respecto a su centro de masa, $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$

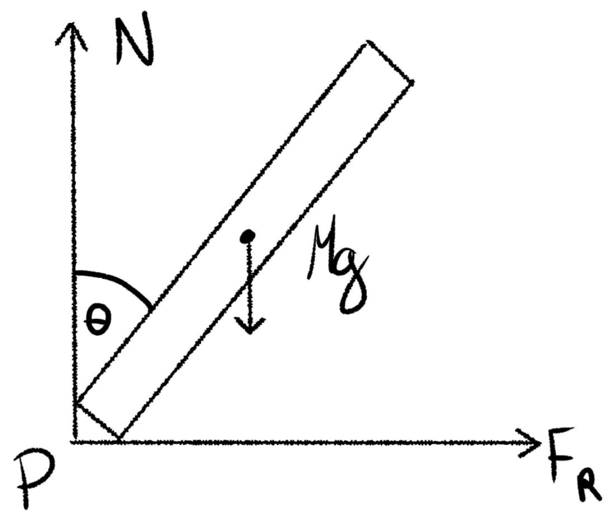
$$I_P = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

También podría decirse que el momento de inercia de una barra uniforme con respecto a uno de sus extremos es conocido. Reemplazando en el valor final de la energía, e igualando con la inicial:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{MgL}{2}\cos\theta = \frac{MgL}{2}$$

$$\frac{1}{3}L\dot{\theta}^2 + g\cos\theta = g \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\text{sen}\theta$$

b) Hacemos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra:



Aplicamos la 2da Ley de Newton según componentes:

$$x : M\ddot{x} = F_R \Rightarrow F_R = M\ddot{x}$$
$$y : M\ddot{y} = N - Mg \Rightarrow N = Mg + M\ddot{y}$$

Pero, tenemos expresiones explícitas para x e y en función de θ:

$$x = \frac{L}{2}\text{sen}\theta \Rightarrow \ddot{x} = \frac{L}{2}(-\text{sen}\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})$$
$$y = \frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{L}{2}(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \text{sen}\theta\ddot{\theta})$$

Reemplazando $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\dot{\theta}^2$ y $\ddot{\theta}$ en las expresiones para la fuerza de roce y la normal:

$$F_R = -\frac{3}{2}Mg\text{sen}\theta(1-\cos\theta) + \frac{3}{4}Mg\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$N = Mg - \frac{3}{2}Mg\cos\theta(1-\cos\theta) - \frac{3}{4}Mg\text{sen}^2\theta$$

Evaluando ambas expresiones en $\theta = \pi/4$:

$$F_R(\pi/4) = Mg\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right)$$

$$N(\pi/4) = Mg\left(1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right)$$

El deslizamiento ocurre si $|F_R| = \mu|N|$:

$$\boxed{\mu = \frac{\frac{9}{8} - \frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{17}{8} - \frac{3}{2\sqrt{2}}}}$$